Álgebra Linear A

Simone Moraes

DMAT - IME - UFBA

SIMONE MARIA DE MORAES

Álgebra Linear A

Anotações de Aula da Professora Simone Moraes

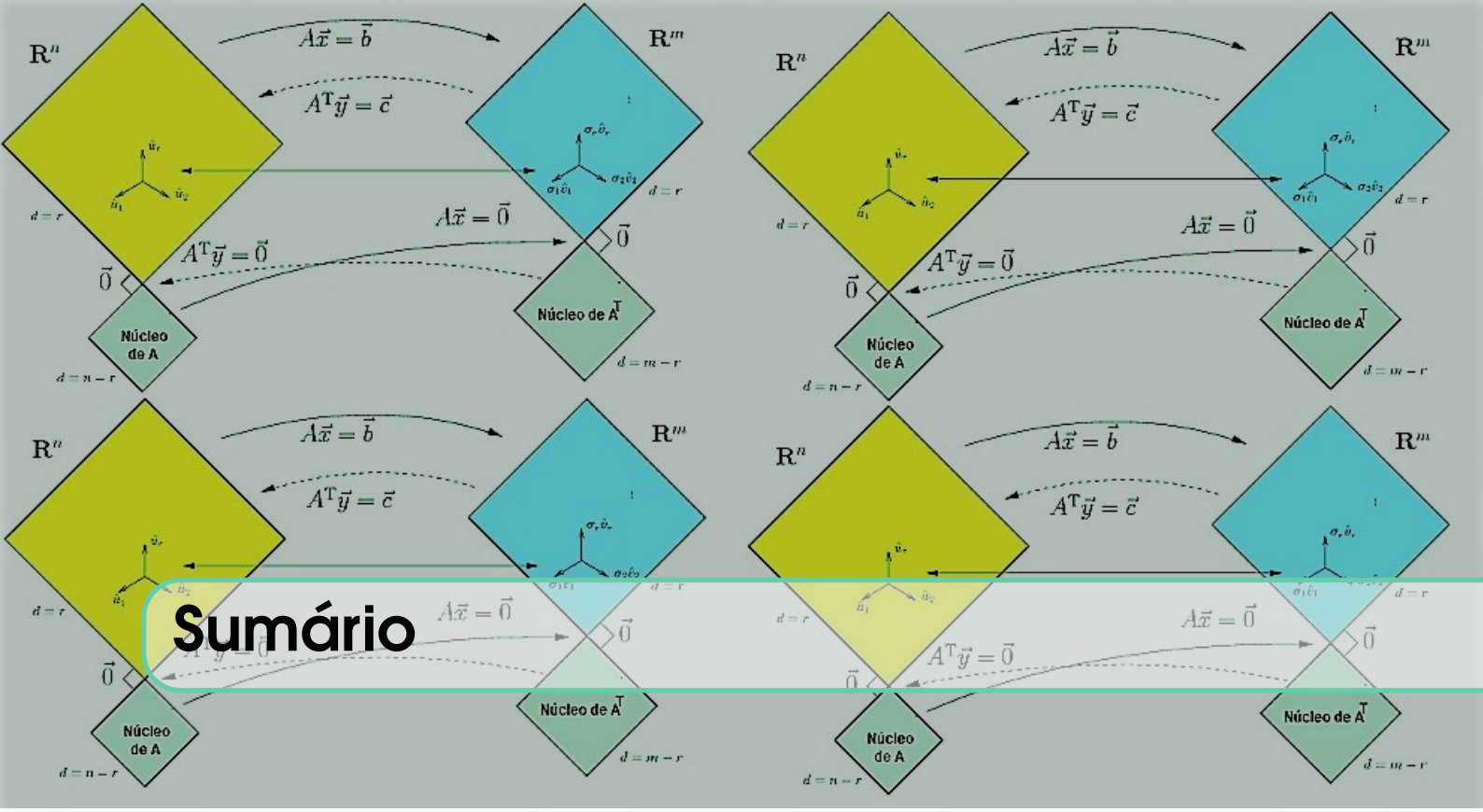
Salvador - Bahia
Edição da Autora
Março de 2023

Copyright © 2023 Álgebra Linear A

PUBLICAÇÃO DA AUTORA

Ao utilizar conteúdos deste material cite a autoria.

Versão revisada, Abril 2024



Sumário

I Preliminares

1 Matrizes 11

1.1 Matrizes **11**
1.1.1 Tipos de Matrizes 14
1.1.2 Operações com Matrizes 17
1.1.3 Matrizes Simétricas, Anti-Simétricas e Ortogonais 25
1.1.4 Matrizes Hermitianas, Anti-Hermitianas e Unitárias 30
1.1.5 Operações Elementares sobre as Linhas de uma Matriz 34

1.2 Determinante de uma Matriz Quadrada **35**
1.2.1 Definição de Determinante 37
1.2.2 Propriedades de Determinantes 42

1.3 Inversa de uma Matriz **54**
1.3.1 Matriz Adjunta e a Inversa 56
1.3.2 Propriedades da Matriz Inversa 59

1.4 Matriz na Forma Escalonada e na Forma Escada **61**
1.4.1 Matriz Linha Equivalente 62
1.4.2 Matriz na Forma Escalonada 63
1.4.3 Matriz na Forma Escalonada Reduzida ou na Forma Escada 63
1.4.4 Matriz Inversa obtida através de Operações Elementares 66

2 Sistemas de Equações Lineares 71

2.1 Sistemas de Equações Lineares **71**
2.1.1 Solução de um Sistema Linear 72
2.1.2 Classificação de Sistemas de Equações Lineares 74
2.1.3 Sistema Linear Homogêneo 74
2.1.4 Sistemas Equivalentes 75

2.1.5 Operações Elementares sobre as Equações de um Sistema Linear 75
2.2 Resolução de Sistemas Lineares 77
2.2.1 Posto e Nulidade de uma Matriz 77
2.2.2 Teorema do Posto 79
2.3 Métodos de Resolução de Sistemas Lineares 81
2.3.1 Método da Eliminação de Gauss-Jordan 81
2.3.2 Método de Eliminação de Gauss ou do Escalonamento 82
2.3.3 Método de Resolução da Matriz Inversa 84
2.3.4 Método de Resolução da Regra de Cramer 85

II Espaços Vetoriais

3 Espaços Vetoriais 91
3.1 Espaços Vetoriais 91
3.1.1 Exemplos de Espaços Vetoriais 92
3.1.2 Propriedades de Espaços Vetoriais 97
3.2 Subespaços Vetoriais 98
3.3 Soma, Soma Direta e Intersecção de Subespaços 106

4 Base e Dimensão de Espaços Vetoriais 111
4.1 Combinação Linear e Subespaço Gerado 111
4.2 Dependência e Independência Linear 116
4.2.1 Propriedades de Dependência e Independência Linear 117
4.3 Base e Dimensão 119
4.3.1 Base de um Espaço Vetorial Finitamente Gerado 119
4.3.2 Base Canônica 120
4.3.3 Dimensão de um Espaço Vetorial Finitamente Gerado 122
4.3.4 Teorema do Completamento 125
4.3.5 Teorema da Soma e da Intersecção de Subespaços 128
4.4 Coordenadas de um Vetor 134
4.5 Matriz Mudança de Base 137

5 Espaços Vetoriais com Produto Interno 143
5.1 Produto Interno em Espaços Vetoriais Reais 143
5.1.1 Propriedade do Produto Interno em $\mathbb{R}$ 143
5.1.2 Exemplo de Espaços Vetoriais Reais com Produto Interno 144
5.1.3 Desigualdade de Cauchy-Schwarz 147
5.2 Produto Interno em Espaços Vetoriais Complexos 147
5.3 Bases Ortogonais e Bases ortonormais 148
5.3.1 Vetores Ortogonais 148
5.3.2 Base Ortogonal 149
5.3.3 Norma de um Vetor 150
5.3.4 Propriedades da Norma 150
5.3.5 Base Ortonormal 153

5.4 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt 156
5.5 Complemento Ortogonal 159

III Transformações Lineares

6 Transformações Lineares ... 165
6.1 Transformações Lineares 165
6.1.1 Propriedades de Transformações Lineares ... 169
6.2 Matriz de uma Transformação Linear 170
6.2.1 Relação entre Matrizes de um Operador Linear ... 176
6.3 Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear 177
6.3.1 Teorema do Núcleo e da Imagem ... 181
6.4 Transformações Lineares Injetoras e Sobrejetoras 186
6.5 Inversa de uma Transformação Linear 189
6.5.1 Isomorfismo Linear ... 190
6.6 O Espaço Vetorial $\mathscr{L}(V,W)$ 197
6.6.1 O Espaço Dual $\mathscr{L}(V,\mathbb{K})$ ... 200

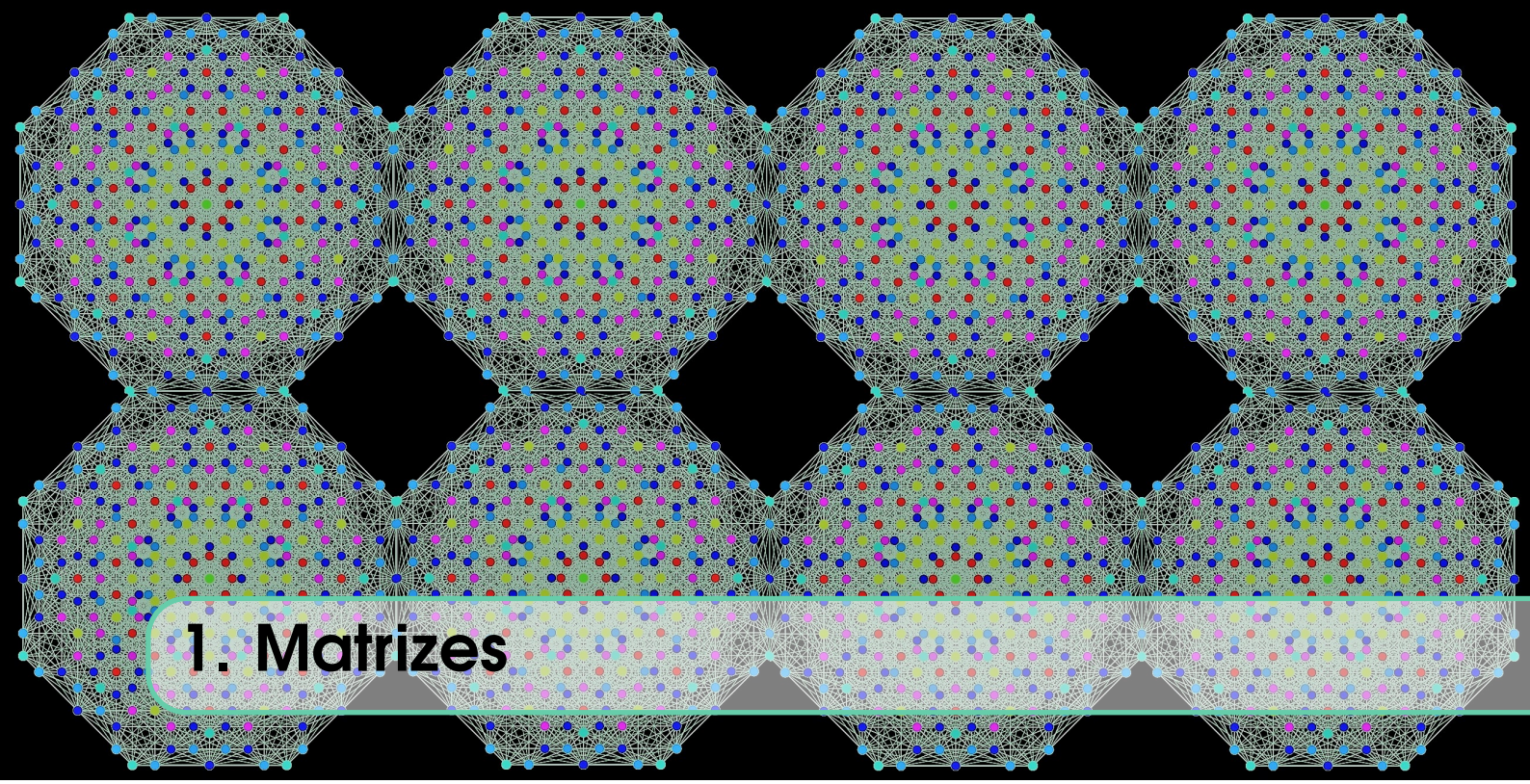
7 Diagonalização de Operadores Lineares ... 203
7.1 Autovalor e Autovetor de um Operador Linear 203
7.1.1 Autoespaço associado a um Autovalor ... 205
7.2 Polinômio Característico de um Operador Linear 208
7.2.1 Polinômio Característico de uma Matriz ... 208
7.3 Diagonalização de Operadores Lineares 226
7.4 Operadores Auto-Adjuntos 235

Bibliografia ... 238

I Preliminares

1 Matrizes 11
1.1 Matrizes
1.2 Determinante de uma Matriz Quadrada
1.3 Inversa de uma Matriz
1.4 Matriz na Forma Escalonada e na Forma Escada

2 Sistemas de Equações Lineares 71
2.1 Sistemas de Equações Lineares
2.2 Resolução de Sistemas Lineares
2.3 Métodos de Resolução de Sistemas Lineares



1. Matrizes

1.1 Matrizes

Definição 1.1.1 Uma **matriz** é uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas, em geral esses elementos são entes matemáticos, tais como: números, funções, etc.

Representamos uma matriz de m linhas e n colunas, denotada por A ou por $A_{m\times n}$, da seguinte maneira:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Observações 1.1.1 (a) Cada elemento de uma matriz A é também chamado uma **entrada** de A.

(b) O elemento $a_{ij}\in A$ está localizado na i-ésima linha e na j-ésima coluna de A, por exemplo a_{32} é o elemento da terceira linha e da segunda coluna.

(c) Além da notação acima também utilizamos:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{ou} \quad A=(a_{ij})_{m\times n} \quad \text{ou} \quad A=(a_{ij}), \quad \text{com} \quad 1\leq i\leq m \quad \text{e} \quad 1\leq j\leq n.$$

A tabela abaixo representa as distâncias entre as capitais do norte do pais indicadas (em quilômetros):

	Belém	Boa Vista	Macapá	Manaus	Porto Velho	Rio Branco
Belém	0	1432	329	1292	1886	2333
Boa Vista	1432	0	1110	661	1335	1626
Macapá	329	1110	0	1054	1724	2159
Manaus	1292	661	1054	0	761	1149
Porto Velho	1886	1335	1724	761	0	449
Rio Branco	2333	1626	2159	1149	449	0

Em forma de matriz essas distâncias podem ser representadas por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1432 & 329 & 1292 & 1886 & 2333 \\ 1432 & 0 & 1110 & 661 & 1335 & 1626 \\ 329 & 1110 & 0 & 1054 & 1724 & 2159 \\ 1292 & 661 & 1054 & 0 & 761 & 1149 \\ 1886 & 1335 & 1724 & 761 & 0 & 449 \\ 2333 & 1626 & 2159 & 1149 & 449 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ordem de uma Matriz

Definição 1.1.2 Uma matriz A de m linhas e n colunas é chamada matriz de **ordem** m por n e indicada por $m \times n$.

Exemplos 1.1.2 (a) $A = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$ é uma matriz de ordem 1×1.

(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & \frac{1}{3} \\ 4 & -7 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz de ordem 3×4.

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ é uma matriz de ordem 2×3.

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \\ 0 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ é uma matriz de ordem 4×2.

Observações 1.1.3 (a) O conjunto de todas matrizes de ordem $m \times n$ com entradas números reais é denotado por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ou seja,

$$M_{m\times n}(\mathbb{R}) = \{A = [a_{ij}]_{m\times n};\ \ a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ para todo } i \text{ e todo } j\}.$$

(b) Analogamente, o conjunto de todas matrizes de ordem $m \times n$ com entradas números complexos é dado por

$$M_{m\times n}(\mathbb{C}) = \{A = [a_{ij}]_{m\times n};\ \ a_{ij} \in \mathbb{C} \text{ para todo } i \text{ e todo } j\}.$$

Matriz Quadrada

Definição 1.1.3 Uma matriz A com n linhas e n colunas é chamada **matriz quadrada** de ordem n.

Observação 1.1.4 Uma matriz A é quadrada se, e somente se, o número de linhas de A é igual ao número de colunas de A.

Exemplos 1.1.5 (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2.

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ \frac{1}{2} & 1 & -4 \\ 10 & -9 & 7 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3.

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 4.

Observações 1.1.6 (a) O conjunto de todas matrizes quadradas de ordem com entradas números reais é denotado por $M_n(\mathbb{R})$.

Assim, $M_n(\mathbb{R}) = \left\{A = [a_{ij}]_{n\times n};\ a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ com } 1 \leq i,\ j \leq n\right\}$.

(b) Analogamente, $M_n(\mathbb{C}) = \left\{A = [a_{ij}]_{n\times n};\ a_{ij} \in \mathbb{C} \text{ com } 1 \leq i,\ j \leq n\right\}$.

Matriz Linha e Matriz Coluna

Definição 1.1.4 Uma matriz que tem uma única linha é chamada **matriz linha**, enquanto que uma matriz que tem uma única coluna é chamada **matriz coluna**.

Exemplos 1.1.7 (a) $A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 11 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -1 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ são matrizes linha.

(b) $A = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ são matrizes coluna.

Matriz Definida por uma Fórmula

Uma matriz pode ser definida em termos de uma fórmula envolvendo seus índices, para se obter uma matriz dessa forma é necessário que seja informada sua ordem.

Exemplos 1.1.8 (a) Determine a matriz $A = [a_{ij}]$ quadrada de ordem 4 tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad i \neq j \\ 1, & \text{se} \quad i = j. \end{cases}$$

Neste caso, temos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) A matriz A de ordem 3×4 dada pela fórmula

$$a_{ij} = \begin{cases} 3i - j^2, & \text{se} \quad i > j - 1 \\ i + 3j, & \text{se} \quad i \leq j - 1 \end{cases}$$

é a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 10 & 13 \\ 5 & 2 & 11 & 14 \\ 8 & 5 & 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

Igualdade de Matrizes

Duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são **iguais** se, e somente se,

(i) A e B têm a mesma ordem.

(ii) $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i e para todo j.

Exemplo 1.1.9 Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & -1 & b \\ a+b & b^2 & 7 \end{bmatrix}$, ambas de ordem 2×3.

As matrizes A e B são iguais se, e somente se, $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ a+b = 3 \\ b^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$.

1.1.1 Tipos de Matrizes

Matriz Nula

Definição 1.1.5 Uma **matriz nula** é uma matriz em que todas as entradas é o número zero. A **matriz nula** de ordem $m \times n$ é indicada por $0_{m\times n}$.

Exemplo 1.1.10 A matriz nula de ordem 4×2 é a seguinte: $0_{4\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Dentre as matrizes quadradas temos alguns tipos especiais que descreveremos a continuação. Antes porém vamos definir diagonal principal e diagonal secundária de uma matriz quadrada.

Definição 1.1.6 Seja A uma matriz quadrada de ordem n,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix},$$

os elementos a_{ij} com $i = j$ constituem a **diagonal principal** de A. Enquanto que os elementos a_{ij} com $i + j = n + 1$ constituem a **diagonal secundária** de A.

Observação 1.1.11 Pela definição acima a diagonal principal de uma matriz quadrada A é constituída pelos elementos

$$a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{nn},$$

e a diagonal secundária de A é constituída pelos elementos

$$a_{1n},\ a_{2(n-1)},\ \cdots,\ a_{(n-1)2},\ a_{n1}.$$

Na matriz A a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

os elementos em azul constituem a diagonal principal, enquanto que os em vermelho constituem a diagonal secundária.

Matriz Diagonal

Definição 1.1.7 Uma matriz $A = [a_{ij}]$ quadrada de ordem n é chamada **matriz diagonal** se, e somente se, os elementos $a_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Observação 1.1.12 Uma matriz quadrada A é diagonal se, e somente se, os elementos externos à diagonal principal são todos iguais a zero.

Exemplo 1.1.13 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal.

Matriz Escalar

Definição 1.1.8 Uma matriz diagonal de ordem n é chamada **matriz escalar** se, e somente se, os elementos da diagonal principal são todos iguais.

Exemplo 1.1.14 As matrizes abaixo são matrizes escalares:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Matriz Identidade

Definição 1.1.9 A **matriz identidade** de ordem n, indicada por I_n, é a matriz diagonal de ordem n em que os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1.

Exemplos 1.1.15 (a) $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz identidade de ordem 2.

(b) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz identidade de ordem 3.

(c) $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz identidade de ordem 4.

Matriz Triangular Superior

Definição 1.1.10 Uma matriz $A = [a_{ij}]$ quadrada de ordem n é chamada **matriz triangular superior** se, e somente se, $a_{ij} = 0$ sempre que para $i > j$, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Observação 1.1.16 Uma matriz quadrada A é triangular superior se, e somente se, os elementos abaixo da diagonal principal são todos iguais a zero.

Exemplo 1.1.17 $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ é uma matriz triangular superior.

Matriz Triangular Inferior

Definição 1.1.11 Uma matriz $A = [a_{ij}]$ quadrada de ordem n é chamada **matriz triangular inferior** se, e somente se, $a_{ij} = 0$ sempre que para $i < j$, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Observação 1.1.18 Uma matriz quadrada A é triangular inferior se, e somente se, os elementos acima da diagonal principal são todos iguais a zero.

Exemplo 1.1.19 $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz triangular inferior.

1.1.2 Operações com Matrizes

No que segue consideraremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Adição de Matrizes

Definição 1.1.12 Sejam A e B matrizes em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, a **soma** de A e B, denotada por $A+B$, é a matriz em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ cujos elementos são as somas dos elementos correspondentes de A e B, ou seja, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

então

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nm1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.1.20 Sejam $A = \begin{bmatrix} -3 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & -5 & 9 & -7 \end{bmatrix}_{2\times 4}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & -8 \\ 2 & 9 & -1 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 4}$, então

$$A+B = \begin{bmatrix} -3+1 & 8+(-3) & 5+11 & 2+(-8) \\ 4+2 & -5+9 & 9+(-1) & -7+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 16 & -6 \\ 6 & 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação 1.1.21 Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$ em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, a **matriz oposta** de A, indicada por $-A$, é a matriz cujos elementos são os opostos dos elementos de A, com relação à operação $+$, ou seja, $-A = [c_{ij}]$, com $c_{ij} = -a_{ij}$.

Propriedades da Adição

Sejam A, B e C matrizes em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $0_{m\times n}$ a matriz nula de ordem $m\times n$, valem:

$A_1)$ $A+B = B+A$, **propriedade comutativa**.

$A_2)$ $(A+B)+C = A+(B+C)$, **propriedade associativa**.

$A_3)$ $A+O_{m\times n} = A$, **propriedade existência de elemento neutro**.

$A_4)$ A matriz $-A$, oposta de A, é tal que $A+(-A) = O_{m\times n}$, **propriedade existência de elemento simétrico**.

Verificação:

Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ e $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ matrizes em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, então:

$A_1)$ $A+B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij}+b_{ij}] \overset{+ \text{ é comutativa em } \mathbb{K}}{=} [b_{ij}+a_{ij}] = [b_{ij}] + [c_{ij}] = B+A.$

$A_2)$ $(A+B)+C = \Big([a_{ij}] + [b_{ij}]\Big) + [c_{ij}] = [a_{ij}+b_{ij}] + [c_{ij}] = [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}]$

$$\overset{+ \text{ é associativa em } \mathbb{K}}{=} [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})] = [a_{ij}] + [b_{ij}+c_{ij}] = [a_{ij}] + \Big([b_{ij}] + [c_{ij}]\Big)$$

$$= A+(B+C).$$

$A_3)$ $A+O_{m\times n}=\left[a_{ij}\right]+\left[0\right]_{m\times n}=\left[a_{ij}+0\right]=\left[a_{ij}\right]=A.$

$A_4)$ $A+(-A)=\left[a_{ij}\right]+\left[-a_{ij}\right]=\left[a_{ij}+(-a_{ij})\right]=\left[0\right]_{m\times n}=O_{m\times n}.$

■

Multiplicação de uma Matriz por um Escalar

Definição 1.1.13 Sejam A uma matriz em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e κ um número em $\mathbb{K}$, a **multiplicação** de A **pelo escalar** κ, denotado por $\kappa\cdot A$, é a matriz em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ cujos elementos são os produtos de κ pelos elementos correspondentes de A, ou seja, se

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix},\qquad \text{então}\qquad \kappa\cdot A=\begin{bmatrix} \kappa\cdot a_{11} & \kappa\cdot a_{12} & \cdots & \kappa\cdot a_{1n}\\ \kappa\cdot a_{21} & \kappa\cdot a_{22} & \cdots & \kappa\cdot a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \kappa\cdot a_{m1} & \kappa\cdot a_{m2} & \cdots & \kappa\cdot a_{mn}\end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.1.22 Sejam $A=\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4\\ 0 & -7 & 10\\ -6 & 3 & 2\\ 9 & 5 & 4\end{bmatrix}_{4\times 3}$ e $\kappa=4$, então

$$\kappa\cdot A=4A=\begin{bmatrix} 4\times 5 & 4\times 8 & 4\times(-4)\\ 4\times 0 & 4\times(-7) & 4\times 10\\ 4\times(-6) & 4\times 3 & 4\times 2\\ 4\times 9 & 4\times 5 & 4\times 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 & 32 & -16\\ 0 & -28 & 40\\ -24 & 12 & 8\\ 36 & 20 & 16\end{bmatrix}.$$

Propriedades da Multiplicação por Escalar

Sejam A e B matrizes em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e κ e λ números em $\mathbb{K}$, valem:

$ME_1)$ $\kappa\cdot(A+B)=\kappa\cdot A+\kappa\cdot B.$

$ME_2)$ $(\kappa+\lambda)\cdot A=\kappa\cdot A+\lambda\cdot A.$

$ME_3)$ $\underbrace{0}_{\text{número}}\cdot A=O_{m\times n}.$

$ME_4)$ $1\cdot A=A.$

$ME_5)$ $(\kappa\cdot\lambda)\cdot A=\kappa\cdot(\lambda\cdot A).$

Verificação:

Sejam $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ e $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ matrizes em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e κ e λ escalares em $\mathbb{K}$, então:

$ME_1)$ $\kappa\cdot(A+B)=\kappa\cdot\left[a_{ij}+b_{ij}\right]=\left[\kappa\cdot(a_{ij}+b_{ij})\right]=\left[\kappa\cdot a_{ij}+\kappa\cdot b_{ij}\right]=\left[\kappa\cdot a_{ij}\right]+\left[\kappa\cdot b_{ij}\right]$
$=\kappa\cdot\left[a_{ij}\right]+\kappa\cdot\left[b_{ij}\right]=\kappa\cdot A+\kappa\cdot B.$

$ME_2)$ $(\kappa+\lambda)\cdot A=(\kappa+\lambda)\cdot\left[a_{ij}\right]=\left[(\kappa+\lambda)\cdot a_{ij}\right]=\left[\kappa\cdot a_{ij}+\lambda\cdot a_{ij}\right]=\left[\kappa\cdot a_{ij}\right]+\left[\lambda\cdot a_{ij}\right]$
$=\kappa\cdot\left[a_{ij}\right]+\lambda\cdot\left[a_{ij}\right]=\kappa\cdot A+\lambda\cdot A.$

$ME_3)$ $0\cdot A = 0\cdot\left[a_{ij}\right] = \left[0\cdot a_{ij}\right] = \left[0\right]_{m\times n} = O_{m\times n}$.

$ME_4)$ $1\cdot A = 1\cdot\left[a_{ij}\right] = \left[1\cdot a_{ij}\right] = \left[a_{ij}\right] = A$.

$ME_5)$ $(\kappa\cdot\lambda)\cdot A = (\kappa\cdot\lambda)\cdot\left[a_{ij}\right] = \left[(\kappa\cdot\lambda)\cdot a_{ij}\right] \overset{\cdot \text{ é associativa em } \mathbb{K}}{=} \left[\kappa\cdot(\lambda\cdot a_{ij})\right] = \kappa\cdot\left[\lambda\cdot a_{ij}\right] = \kappa\cdot(\lambda\cdot A)$. ■

Observação 1.1.23 Dada uma matriz A em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, a matriz $(-1)\cdot A$ é a **matriz oposta** de A, ou seja, $(-1)\cdot A = -A$.

De fato,

$$(-1)\cdot A = (-1)\cdot\left[a_{ij}\right] = \left[(-1)\cdot a_{ij}\right] = \left[-a_{ij}\right] = -A.$$

Multiplicação de Matrizes

Definição 1.1.14 Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes em $M_{m\times k}(\mathbb{K})$ e em $M_{k\times n}(\mathbb{K})$, respectivamente, a **multiplicação** de A por B, denotada por $A\cdot B$, é a matriz em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$:

$$A\cdot B = [c_{ij}], \quad \text{cujos elementos são da forma} \quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip}b_{pj}.$$

Observações 1.1.24 (a) De acordo com a definição acima temos, por exemplo:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1k}b_{k1} \quad \text{e} \quad c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1k}b_{k2}.$$

(b) A equação que define os elementos de $A\cdot B$ nos diz que o elemento c_{ij} desta matriz, localizado na i-ésima linha e j-ésima coluna, é obtido através da soma de todos os produtos de cada elemento da i-ésima linha de A pelo elemento correspondente da j-ésima coluna de B, ou seja, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix}_{m\times k} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix}_{k\times n},$$

então

$$\begin{array}{l} \\ i\text{-ésima linha} \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad j\text{-ésima coluna} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \downarrow \\ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \vdots & c_{mj} & \vdots & c_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \end{array} = A\cdot B,$$

com $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip}b_{pj}$.

Exemplo 1.1.25 Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 2 & -3 & 8 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}_{4\times 3}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$, então o produto de A por B é a matriz

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} (-1)\times 3+7\times(-5)+(-5)\times 1 & (-1)\times 6+7\times 4+(-5)\times 2 \\ 2\times 3+(-3)\times(-5)+8\times 1 & 2\times 6+(-3)\times 4+8\times 2 \\ 5\times 3+1\times(-5)+3\times 1 & 5\times 6+1\times 4+3\times 2 \\ 0\times 3+2\times(-5)+9\times 1 & 0\times 6+2\times 4+9\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -43 & 12 \\ 29 & 16 \\ 13 & 40 \\ -1 & 26 \end{bmatrix}_{4\times 2}.$$

Observação 1.1.26 Sejam A e B matrizes, o produto $A\cdot B$ está definido apenas quando o número de colunas A é igual ao número de linhas de B.

Logo, se $A\cdot B$ está definida nem sempre ocorrerá o mesmo para $B\cdot A$, e mesmo quando $A\cdot B$ e $B\cdot A$ estiverem definidas podemos ter $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Exemplos 1.1.27 (a) Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}_{3\times 1}$, então $A\cdot B = \begin{bmatrix} -4 \\ 31 \end{bmatrix}_{2\times 1}$,

note que não está definida $B\cdot A$, pois:

número de colunas de $B = 1 \neq$ número de linhas de $A = 2$.

(b) Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$, então $A\cdot B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -30 & 31 \end{bmatrix}_{2\times 2}$.

No entanto, $B\cdot A = \begin{bmatrix} 14 & -4 & -3 \\ 11 & 8 & 19 \\ -24 & 12 & 15 \end{bmatrix}_{3\times 3}$, ou seja, $A\cdot B$ e $B\cdot A$ têm ordens diferentes, logo são diferentes.

(c) Sejam $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$, então

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} 20 & 28 \\ 21 & 54 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad \text{e} \quad B\cdot A = \begin{bmatrix} 62 & -2 \\ -12 & 12 \end{bmatrix}_{2\times 2},$$

neste caso $A\cdot B$ e $B\cdot A$ têm a mesma ordem, mas são diferentes.

Propriedades da Multiplicação

M_1) Se A é uma matriz em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, então:

(a) $A\cdot I_n = I_m\cdot A = A$.

(b) $A\cdot 0_{n\times k} = 0_{m\times k}$ e $0_{k\times m}\cdot A = 0_{k\times n}$.

M_2) Sejam $A\in M_{m\times l}(\mathbb{K})$, $B\in M_{l\times k}(\mathbb{K})$ e $C\in M_{k\times n}(\mathbb{K})$ matrizes, então:

$$\left(A_{m\times l}\cdot B_{l\times k}\right)_{m\times k}\cdot C_{k\times n} = A_{m\times p}\cdot\left(B_{l\times k}\cdot C_{k\times n}\right)_{p\times n} \quad \textbf{propriedade associativa}.$$

M_3) **Propriedades distributivas:**

(a) Sejam A em $M_{m\times k}(\mathbb{K})$, B e C em $M_{k\times n}(\mathbb{K})$, então:

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C.$$

(b) Sejam A e $B_{m\times k}$ em $M_{m\times k}(\mathbb{K})$ e C em $M_{k\times n}(\mathbb{K})$, temos:

$$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C \quad .$$

M_4) Sejam A em $M_{m\times k}(\mathbb{K})$ e B em $M_{k\times n}(\mathbb{K})$ e λ um número em $\mathbb{K}$, então:

$$\lambda\cdot(A\cdot B)=(\lambda\cdot A)\cdot B=A\cdot(\lambda\cdot B).$$

Verificação:

M_1) Seja A matriz em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, indicando por $I_n=\left[e_{kj}\right]_{n\times n}$ a matriz identidade de ordem n, com $e_{kj}=\begin{cases}1 & \text{se} \quad k=j\\ 0 & \text{se} \quad k\neq j\end{cases}$, então:

$$A\cdot I_n=\left[a_{ik}\right]_{m\times n}\cdot\left[e_{kj}\right]_{n\times n}=\left[c_{ij}\right]_{m\times n},$$

com $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot e_{kj}\overset{e_{kj}=0 \text{ se } k\neq j}{=}a_{ij}\cdot e_{jj}\overset{e_{jj}=1}{=}a_{ij}$.

Portanto, $A\cdot I_n=A$.

Analogamente mostramos que $I_m\cdot A=A$.

M_2) Sejam $A=\left[a_{ir}\right]_{m\times l}$, $B=\left[b_{rj}\right]_{l\times k}$ e $C=\left[c_{jt}\right]_{k\times n}$ matrizes em $M_{m\times l}(\mathbb{K})$, $M_{l\times k}(\mathbb{K})$ e $M_{k\times n}(\mathbb{K})$, respectivamente.

Logo, $A\cdot B=\left[d_{ij}\right]_{m\times k}$, com $d_{ij}=\sum_{r=1}^{l}a_{ir}\cdot b_{rj}$ e $B\cdot C=\left[f_{rt}\right]_{l\times n}$, com $f_{rt}=\sum_{j=1}^{k}b_{rj}\cdot c_{jt}$.

Consequentemente,

$$(A\cdot B)\cdot C=\left[d_{ij}\right]\cdot\left[c_{jt}\right]=\left[g_{it}\right],$$

com

$$g_{it}=\sum_{j=1}^{k}d_{ij}\cdot c_{jt}=\sum_{j=1}^{k}\Big(\sum_{r=1}^{l}a_{ir}\cdot b_{rj}\Big)\cdot c_{jt}=\sum_{r=1}^{l}a_{ir}\cdot\Big(\sum_{j=1}^{k}b_{rj}\cdot c_{jt}\Big)=h_{it},$$

tal que $A\cdot(B\cdot C)=\left[a_{ir}\right]\cdot\left[f_{rt}\right]=\left[h_{it}\right]$.

Portanto, $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.

M_3) Consideremos matrizes $A=\left[a_{ik}\right]_{m\times l}$ em $M_{m\times l}(\mathbb{K})$, $B=\left[b_{kj}\right]_{l\times n}$ e $C=\left[c_{kj}\right]_{l\times n}$ em $M_{l\times n}(\mathbb{K})$, então:

$$A\cdot(B+C)=\left[a_{ik}\right]\cdot\left[b_{kj}+c_{kj}\right]=\left[d_{ij}\right],$$

com

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}\cdot(b_{kj}+c_{kj})=\sum_{k=1}^{l}\left(a_{ik}\cdot b_{kj}+a_{ik}\cdot c_{kj}\right)=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}\cdot b_{kj}+\sum_{k=1}^{l}a_{ik}\cdot c_{kj}=f_{ij}+g_{ij},$$

tais que $A\cdot B=\left[f_{ij}\right]$ e $A\cdot C=\left[g_{ij}\right]$.

Portanto, $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$.

A distributiva pela direita é mostrada de maneira análoga.

M_4) Consideremos matrizes $A = \left[a_{il}\right]_{m\times k}$ em $M_{m\times k}(\mathbb{K})$ e $B = \left[b_{lj}\right]_{k\times n}$ em $M_{k\times n}(\mathbb{K})$ e λ escalar em $\mathbb{K}$.

Sendo $A\cdot B = \left[d_{ij}\right]$, com $d_{ij} = \sum_{l=k}^{l} a_{il}\cdot b_{lj}$, então $\lambda\cdot(A\cdot B) = \lambda\cdot\left[d_{ij}\right] = \left[\lambda\cdot d_{ij}\right]$, com

$$\lambda\cdot d_{ij} = \lambda\cdot\sum_{l=k}^{l} a_{il}\cdot b_{lj} = \sum_{l=k}^{l}\lambda\cdot(a_{il}\cdot b_{lj}) = \sum_{l=k}^{l}(\lambda\cdot a_{il})\cdot b_{lj} = f_{ij},$$

tal que $(\lambda\cdot A)\cdot B = \left[f_{ij}\right]$.

Portanto, $\lambda\cdot(A\cdot B) = (\lambda\cdot A)\cdot B$.

Analogamente mostramos que $\lambda\cdot(A\cdot B) = A\cdot(\lambda\cdot B)$.

■

Observações 1.1.28 (a) Dada uma matriz quadrada A em $M_n(\mathbb{K})$ a k-ésima potência de A, com $k\in\mathbb{N}^*$, denotada por A^k, é o produto de A por A k-vezes, ou seja

$$A^k = \underbrace{A\cdot A\cdot\ \cdots\ \cdot A}_{k\text{ vezes}}.$$

(b) Se E é uma matriz escalar e A matriz quadrada, ambos em $M_n(\mathbb{K})$, então

$$E\cdot A = A\cdot E.$$

De fato, seja E a matriz escalar em $M_n(\mathbb{K})$ cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a $d\in\mathbb{K}$ e $A = [a_{ij}]$, então

$$E\cdot A = [b_{ij}],\quad \text{com}\ \ b_{ij} = d\times a_{ij}\quad \text{e}\ \ = A\cdot E = [c_{ij}],\quad \text{com}\ \ c_{ij} = a_{ij}\times d.$$

Proposição 1.1.29 Uma A matriz em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ é tal que $A_{m\times n}\cdot X_{n\times 1} = 0_{m\times 1}$ para toda matriz coluna X em $M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ se, e somente se, $A = 0_{m\times n}$.

Demonstração: Se $A = 0_{m\times n}$, é claro que $A\cdot X = 0_{m\times 1}$ para toda matriz coluna X em $M_{n\times 1}(\mathbb{K})$.

Reciprocamente, suponhamos que $A\cdot X = 0_{m\times 1}$ para toda matriz coluna X em $M_{n\times 1}(\mathbb{K})$.

Da propriedade M_1 acima segue que $A = A\cdot I_n$, portanto:

$$A = A\cdot I_n = \left[A\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\quad A\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\quad\cdots\quad A\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right] \overset{\text{hip.}}{=} \begin{bmatrix}0_{m\times 1} & 0_{m\times 1} & \cdots & 0_{m\times 1}\end{bmatrix} = 0_{m\times n}.$$

■

Corolário 1.1.30 Sejam A e B matrizes em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $A = B$ se, e somente se, $A\cdot X = B\cdot X$ para toda matriz coluna X em $M_{n\times 1}(\mathbb{K})$.

Demonstração:

$$A\cdot X = B\cdot X \Longleftrightarrow A\cdot X - B\cdot X = 0_{m\times 1} \Longleftrightarrow (A-B)\cdot X = 0_{m\times 1}\quad \text{para toda } X\in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$$

$$\overset{\text{pela prop.1.1.29}}{\Longleftrightarrow} A - B = 0_{m\times n} \Longleftrightarrow A = B.$$

■

Transposta de uma Matriz

Definição 1.1.15 A **transposta** de uma matriz $A = [a_{ij}]$ em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, denotada por A^T, é a matriz cujas respectivas linhas são as respectivas colunas de A, ou seja,

$$A^T = [b_{ij}] \qquad \text{tal que} \qquad b_{ij} = a_{ji}.$$

É claro que a ordem de A^T é $n \times m$.

Observação 1.1.31 Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$, então $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m}$,

ou seja, o elemento ij de A^T é o elemento ji de A.

Propriedades da Transposta

Segue diretamente da definição de transposta que se A é uma matriz em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e κ um número em $\mathbb{K}$, então valem as seguintes propriedades:

$T_1)$ $(A^T)^T = A$.

$T_2)$ $(A+B)^T = A^T + B^T$, com B matriz em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

$T_3)$ $(\kappa \cdot A)^T = \kappa \cdot A^T$.

$T_4)$ $(A \cdot B)^T = B^t \cdot A^T$, com B matriz em $M_{n\times k}(\mathbb{K})$.

Verificação:

$T_1)$ Para quaisquer i e j, o elemento ij da matriz $(A^T)^T$ é o elemento ji de A^T, e este por sua vez é o elemento ij da matriz A, consequentemente, $(A^T)^T = A$.

$T_2)$ Como $A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$, segue que para quaisquer i e j, o elemento ij da matriz $(A+B)^T$ é o elemento $a_{ji}+b_{ji}$, mas a_{ji} é o elemento ij da matriz A^T e b_{ji} é o elemento ij da matriz B^T, consequentemente, $a_{ji}+b_{ji}$ é o elemento ij de A^T+B^T.

Portanto, $(A+B)^T = A^T + B^T$.

$T_3)$ Como $\kappa \cdot A = [\kappa \cdot a_{ij}]_{m\times n}$, segue que para quaisquer i e j, o elemento ij da matriz $(\kappa \cdot A)^T$ é o elemento $\kappa \cdot a_{ji}$, mas a_{ji} é o elemento ij da matriz A^T, e portanto $\kappa \cdot a_{ji}$ é o elemento ij da matriz $\kappa \cdot A^T$.

Portanto, $(\kappa \cdot A)^T = \kappa \cdot A^T$.

$T_4)$ Vimos que $A \cdot B = [c_{ij}]_{m\times k}$, com

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj},$$

para $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le k$.

Logo, $(A \cdot B)^T = [d_{ij}]_{k\times m}$ com $d_{ij} = c_{ji}$, o elemento ji da matriz $A \cdot B$, ou seja,

$$d_{ij} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jn}c_{ni},$$

com $1 \le i \le k$ e $1 \le j \le m$.

Por outro lado,

$$B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1k} & b_{2k} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}_{k\times n} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m} = [e_{ij}]_{k\times m},$$

com

$$e_{ij} = b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ni}a_{jn},$$

para $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq m$.

Logo, $d_{ij} = e_{ij}$, para todo i e todo j, consequentemente, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

■

Traço de uma Matriz

Definição 1.1.16 Seja A uma matriz quadrada em $M_n(\mathbb{K})$ o **traço** de A, denotado por $tr(A)$, é o número dado pela soma dos elementos da diagonal principal de A.

Assim, se $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, então

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Propriedades do Traço

Segue diretamente da definição de traço de uma matriz quadrada, que dadas A e B matrizes quadradas em $M_n(\mathbb{K})$ e κ um número em $\mathbb{K}$ valem:

$TR_1)$ $tr(A) = tr(A^T)$.

$TR_2)$ $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

$TR_3)$ $tr(\kappa \cdot A) = \kappa \cdot tr(A)$.

$TR_4)$ $tr(A \cdot B) = tr(A \cdot B)$.

Verificação:

$TR_1)$ Uma matriz quadrada e sua transposta têm a mesma diagonal principal, portanto $tr(A) = tr(A^T)$.

$TR_2)$ A diagonal principal da soma de duas matrizes quadradas é a soma das diagonais principais de cada uma das matrizes, logo $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

$TR_3)$ A diagonal principal da matriz $\kappa \cdot A$ é a soma dos elementos da diagonal principal de A previamente multiplicados por κ, assim $tr(\kappa \cdot A) = \kappa \cdot tr(A)$.

$TR_4)$ Sejam $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B = [b_{ij}] \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, então:

$$A \cdot B = [c_{ij}] \in M_m(\mathbb{K}), \quad \text{com} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad \text{para} \quad 1 \leq i,\ j \leq m;$$

$$B \cdot A = [d_{ij}] \in M_n(\mathbb{K}), \quad \text{com} \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}, \quad \text{para} \quad 1 \leq i,\ j \leq n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} tr(A\cdot B) &= c_{11}+c_{22}+\cdots+c_{mm} \\ &= a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1}+a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2}+\cdots+ \\ &\quad a_{m1}b_{1m}+a_{m2}b_{2m}+\cdots+a_{mn}b_{nm} \\ &= b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+\cdots+b_{1m}a_{m1}+b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}+\cdots+b_{2m}a_{m2}+\cdots+ \\ &\quad b_{n1}a_{1n}+b_{n2}a_{2n}+\cdots+b_{nm}a_{mn} \\ &= d_{11}+d_{22}+\cdots+d_{nn}=tr(B\cdot A). \end{aligned}$$

Consequentemente, $tr(A\cdot B)=tr(B\cdot A)$.

■

Observação 1.1.32 Dada $A\in M_n(\mathbb{K})$, então $tr(A^T\cdot A)=\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}^2$.

De fato,

$$A^T\cdot A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^2+a_{21}^2+\cdots+a_{n1}^2 & & & \\ & a_{12}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{n2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{1n}^2+a_{2n}^2+\cdots+a_{nn}^2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$tr(A^T\cdot A)=a_{11}^2+a_{21}^2+\cdots+a_{n1}^2+a_{12}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{n2}^2+\cdots+a_{1n}^2+a_{2n}^2+\cdots+a_{nn}^2=\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

1.1.3 Matrizes Simétricas, Anti-Simétricas e Ortogonais

Matriz Simétrica

Definição 1.1.17 Uma matriz quadrada A em $M_n(\mathbb{K})$ é **simétrica** se, e somente se, para todo i e para todo j os elementos a_{ij} e a_{ji} coincidem, ou seja, $a_{ij}=a_{ji}$.

Observação 1.1.33 Uma matriz $A=[a_{ij}]$ em $M_n(\mathbb{K})$ é simétrica, se e somente se,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

ou seja, se e somente A coincide com sua transposta.

Logo, $A\in M_n(\mathbb{K})$ é simétrica se, e somente se, $A=A^T$.

Exemplo 1.1.34 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 1 \\ -2 & 5 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ é uma matriz simétrica, pois

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 1 \\ -2 & 5 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} = A.$$

Matriz Anti-Simétrica

Definição 1.1.18 Uma matriz quadrada A em $M_n(\mathbb{K})$ é **anti-simétrica** se, e somente se, para todo i e para todo j os elementos a_{ij} e a_{ji} são opostos, ou seja, $a_{ij} = -a_{ji}$.

Observações 1.1.35 (a) Uma matriz $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$ é anti-simétrica, se e somente se,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, se e somente A coincide com a oposta de sua transposta.

Logo, $A \in M_n(\mathbb{K})$ é anti-simétrica se, e somente se, $A = -A^T$.

(b) A diagonal de uma matriz anti-simétrica é nula, pois os elementos devem satisfazer $a_{ii} = -a_{ii} \Longleftrightarrow a_{ii} = 0$.

Logo, uma condição necessária para que uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ em $M_n(\mathbb{K})$ seja anti-simétrica é que $a_{ii} = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Exemplo 1.1.36 $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & -9 \\ -4 & 0 & -7 & 11 \\ -5 & 7 & 0 & 4 \\ 9 & -11 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz anti-simétrica, pois

$$-A^T = -\begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 & 9 \\ 4 & 0 & 7 & -11 \\ 5 & -7 & 0 & -4 \\ -9 & 11 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & -9 \\ -4 & 0 & -7 & 11 \\ -5 & 7 & 0 & 4 \\ 9 & -11 & -4 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

Proposição 1.1.37 Se A é uma matriz em $M_n(\mathbb{K})$ e $\kappa \in \mathbb{K}$, então:

(i) A matriz $\kappa \cdot (A + A^T)$ é simétrica.

(ii) A matriz $\kappa \cdot (A - A^T)$ é anti-simétrica.

(iii) Toda matriz quadrada em $M_n(\mathbb{K})$ é a soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica.

Demonstração: Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$, então temos:

(i) $\left(\kappa\cdot(A+A^T)\right)^T \overset{T_3}{=} \kappa\cdot(A+A^T)^T \overset{T_2}{=} \kappa\cdot\left(A^T+(A^T)^T\right) \overset{T_1}{=} \kappa\cdot(A^T+A)$.

Portanto, $\kappa\cdot(A+A^T)$ é simétrica.

(ii) $\left(\kappa\cdot(A-A^T)\right)^T \overset{T_3}{=} \kappa\cdot(A-A^T)^T \overset{T_2}{=} \kappa\cdot\left(A^T+(-A^T)^T\right) \overset{T_3}{=} \kappa\cdot\left(A^T-(A^T)^T\right) \overset{T_1}{=} \kappa\cdot(A^T-A) = -\left(\kappa\cdot(A-A^T)\right)$.

Portanto, $\kappa\cdot(A-A^T)$ é anti-simétrica.

(iii) Observemos que $A = \frac{1}{2}\left(A+A+A^T-A^T\right) = \underbrace{\frac{1}{2}(A+A^T)}_{\text{por (i) é simétrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A-A^T)}_{\text{por (ii) é anti-simétrica}}$.

■

Matriz Normal Real

Definição 1.1.19 Uma matriz quadrada A em $M_n(\mathbb{R})$ é **normal real** se, e somente se,

$$A\cdot A^T = A^T\cdot A,$$

ou seja, se e somente se, o produto de A por sua transposta A^T é comutativo.

Exemplo 1.1.38 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz real normal, pois

$$A\cdot A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -5 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 10 & 2 \\ 10 & 14 & -5 \\ 2 & -5 & 38 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -5 & -2 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} = A^T\cdot A.$$

Observações 1.1.39 (a) Toda matriz simétrica real é matriz normal, pois

$$A\cdot A^T \overset{A=A^T}{=} A\cdot A \overset{A=A^T}{=} A^T\cdot A.$$

(b) Toda matriz anti-simétrica real é matriz normal, pois

$$A\cdot A^T \overset{A^T=-A}{=} A\cdot(-A) \overset{A=-A^T}{=} (-A^T)\cdot(-A) = A^T\cdot A.$$

(c) Se A é matriz quadrada em $M_n(\mathbb{R})$ que é a soma de uma matriz anti-simétrica e uma matriz escalar, então A é matriz normal.
De fato, suponhamos que $A = E+S$, com E matriz escalar e S matriz anti-simétrica, então:

$$\begin{aligned} A\cdot A^T &= (E+S)\cdot(E+S)^T = (E+S)\cdot(E^T+S^T) \overset{E^T=E,\ S^T=-S}{=} (E+S)\cdot(E-S) \\ &= E^2+S\cdot E-E\cdot S-S^2 \overset{ES=SE}{=} E^2-S^2. \end{aligned}$$

Analogamente, $A^T\cdot A = E^2-S^2$.

Portanto, A é normal.

Matriz Ortogonal

Definição 1.1.20 Uma matriz quadrada A em $M_n(\mathbb{R})$ é **ortogonal** se, e somente se, $A \cdot A^T = I_n$.

Exemplos 1.1.40 Mostre que as matrizes abaixo são ortogonais:

(a) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ com $\theta \in [0, 2\pi)$.

(b) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Solução:

(a)
$$\begin{aligned} A \cdot A^T &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta & \cos\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta \\ \cos\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta & \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, A é ortogonal.

(b)
$$\begin{aligned} A \cdot A^T &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3} & \frac{2}{6}-\frac{1}{3} & \frac{1}{2}-\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6}-\frac{1}{3} & \frac{4}{6}+\frac{1}{3} & -\frac{2}{6}+\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3} & -\frac{2}{6}+\frac{1}{3} & \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, A é ortogonal.

$$A\cdot A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(c)

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, A é ortogonal.

Proposição 1.1.41 Se $A \in M_2(\mathbb{R})$ é uma matriz ortogonal, então:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

para algum $\theta \in [0, 2\pi)$.

Demonstração: Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ é uma matriz ortogonal, então

$$A\cdot A^T = I_2 \iff \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{cases}.$$

De uma propriedade de números reais sabemos que se $a^2+b^2=1$, então existe $\theta \in [0,2\pi)$ tal que $a=\cos\theta$ e $b=\text{sen}\,\theta$, da mesma maneira como $c^2+d^2=1$ existe $\phi \in [0,2\pi)$ tal que $c=\cos\phi$ e $d=\text{sen}\,\phi$.

Assim, a equação $ac+bd=0$ pode ser escrita como

$$\cos\theta\cos\phi \;+\; \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi = 0 \iff \cos(\phi-\theta)=0$$

$$\iff \phi-\theta = \frac{\pi}{2}+k\pi, \quad \text{com} \quad k\in\mathbb{Z} \iff \phi = \theta+\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad \text{com} \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\cos\phi &= \cos\left(\theta+\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right) = \mp\text{sen }\theta\\ \text{sen }\phi &= \text{sen}\left(\theta+\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right) = \pm\cos\theta.\end{aligned}$$

Portanto,

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \text{sen }\theta\\ \text{sen }\theta & -\cos\theta\end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\text{sen }\theta\\ \text{sen }\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

para algum $\theta\in[0,2\pi)$. ■

1.1.4 Matrizes Hermitianas, Anti-Hermitianas e Unitárias

Nesta seção, para não confundir o índice da posição ij com a unidade imaginária i, vamos indicar por jk a posição da j-ésima linha e da k-ésima coluna.

Conjugada Transposta de uma Matriz Complexa

Definição 1.1.21 Dada $A=[z_{jk}]$ uma matriz em $M_{m\times n}(\mathbb{C})$, com $z_{jk}=a_{jk}+ib_{jk}\in\mathbb{C}$, a **matriz conjugada** de A, indicada por $\overline{A}$, é a matriz cujos elementos são os respectivos conjugados dos elementos de A, ou seja, $\overline{A}=[\overline{z_{jk}}]$.

Logo, se $A=\begin{bmatrix}a_{11}+ib_{11} & a_{12}+ib_{12} & \cdots & a_{1n}+ib_{1n}\\ a_{21}+ib_{21} & a_{22}+ib_{22} & \cdots & a_{2n}+ib_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}+ib_{m1} & a_{m2}+ib_{m2} & \cdots & a_{mn}+ib_{mn}\end{bmatrix}$, então

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}a_{11}-ib_{11} & a_{12}-ib_{12} & \cdots & a_{1n}-ib_{1n}\\ a_{21}-ib_{21} & a_{22}-ib_{22} & \cdots & a_{2n}-ib_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}-ib_{m1} & a_{m2}-ib_{m2} & \cdots & a_{mn}-ib_{mn}\end{bmatrix}.$$

Observação 1.1.42 Dados $z_1=x_1+iy_1$ e $z_2=x_2+iy_2$ em $\mathbb{C}$, então $overlinez_1=(x_1-iy_1$ e $\overline{z_2}=x_2-iy_2$.

Logo, $z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$, consequentemente

$$\overline{z_1+z_2}=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2) \;=\; (x_1-iy_1)+(x_2-iy_2) \;=\; overlinez_1+overlinez_2.$$

Portanto, dadas A e B matrizes em $M_{m\times n}(\mathbb{C})$, então $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$.

Por outro lado,

$$z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1),$$

consequentemente $\overline{z_1\cdot z_2}=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1)$.

Mas, $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(x_1-iy_1)\cdot(x_2-iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1)$, portanto $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

Logo, dadas $A\in M_{m\times k}(\mathbb{C})$ e $B\in M_{k\times n}(\mathbb{C})$, então $\overline{A\cdot B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$.

Definição 1.1.22 A **conjugada transposta** ou a **transconjugada** de uma matriz complexa $A=[z_{jk}]\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, denotada por A^*, é a matriz transposta da matriz conjugada de A, ou seja, é a matriz cujas respectivas linhas são as respectivas colunas de $\overline{A}$, assim:

$$A^*=\overline{A}^T=[w_{jk}] \qquad \text{tal que} \qquad w_{jk}=\overline{z_{jk}}.$$

Observações 1.1.43 (a) É fácil ver que $\overline{A}^T=\overline{A^T}$, ou seja, a matriz conjugada transposta de A é igual à matriz transposta conjugada de A.

(b) Se $A\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, é claro que A^* está em $M_{n\times m}(\mathbb{C})$.

(c) Se $A=\begin{bmatrix} a_{11}+ib_{11} & a_{12}+ib_{12} & \cdots & a_{1n}+ib_{1n}\\ a_{21}+ib_{21} & a_{22}+ib_{22} & \cdots & a_{2n}+ib_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+ib_{m1} & a_{m2}+ib_{m2} & \cdots & a_{mn}+ib_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}$, então

$$A^*=\overline{A}^T=\begin{bmatrix} a_{11}-ib_{11} & a_{21}-ib_{21} & \cdots & a_{m1}-ib_{m1}\\ a_{12}-ib_{12} & a_{22}-ib_{22} & \cdots & a_{m2}-ib_{m2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}-ib_{1n} & a_{2n}-ib_{2n} & \cdots & a_{mn}-ib_{mn}\end{bmatrix}_{n\times m}.$$

Propriedades da Conjugada Transposta

Segue, diretamente da definição de transposta e das propriedades de conjugação de números complexos, que para A e B matrizes em $M_{m\times n}(\mathbb{C})$, C matriz em $M_{n\times k}(\mathbb{C})$ e κ um número complexo valem as seguintes propriedades:

$CT_1)$ $(A^*)^*=A$.

$CT_2)$ $(A+B)^*=A^*+B^*$.

$CT_3)$ $(\kappa\cdot A)^*=\overline{\kappa}\cdot A^*$.

$CT_4)$ $(A\cdot C)^*=C^*\cdot A^*$.

Matriz Hermitiana

Definição 1.1.23 Uma matriz quadrada $A=[z_{jk}]$ em $M_n(\mathbb{C})$ é **hermitiana**, se e somente se, $A=A^*$, ou seja, $z_{jk}=\overline{z_{kj}}$ para todo j e para todo k em $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$.

Observação 1.1.44 Uma matriz $A=[z_{jk}]$ quadrada em $M_n(\mathbb{C})$, com $z_{jk}=a_{jk}+ib_{jk}$, é hermitiana, se e somente se,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}+ib_{11} & a_{12}+ib_{12} & \cdots & a_{1n}+ib_{1n}\\ a_{21}+ib_{21} & a_{22}+ib_{22} & \cdots & a_{2n}+ib_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+ib_{n1} & a_{n2}+ib_{n2} & \cdots & a_{nn}+ib_{nn}\end{bmatrix}=A^*=\begin{bmatrix} a_{11}-ib_{11} & a_{21}-ib_{21} & \cdots & a_{n1}-ib_{n1}\\ a_{12}-ib_{12} & a_{22}-ib_{22} & \cdots & a_{n2}-ib_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}-ib_{1n} & a_{2n}-ib_{2n} & \cdots & a_{nn}-ib_{nn}\end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a_{kk}+ib_{kk} &= a_{kk}-ib_{kk}\\ a_{kj}+ib_{kj} &= a_{jk}-ib_{jk}\end{cases} \text{ para todo } j \text{ e para todo } k \text{ em } \{1,2,\cdots,n\}.$$

Logo, devemos ter $b_{kk}=0$ para todo k e $\begin{cases} a_{kj} &= a_{jk}\\ b_{kj} &= -b_{jk}\end{cases}$ para todo j e todo k.

Consequentemente a diagonal principal de uma matriz hermitiana $A=[z_{jk}]$ é constituída apenas de números reais.

Exemplo 1.1.45 A matriz $A=\begin{bmatrix} -5 & 1-2i & 5+8i & 3i \\ 1+2i & 0 & 3-7i & 4+9i \\ 5-8i & 3+7i & -6 & 1-5i \\ -3i & 4-9i & 1+5i & 11 \end{bmatrix}$ é uma matriz hermitiana, pois os elementos da diagonal principal são números reais e $a_{kj}+ib_{kj}=a_{jk}-ib_{jk}$ para todo j e todo k em $\{1,2,3,4\}$.

Matriz Anti-Hermitiana

Definição 1.1.24 Uma matriz quadrada $A=[z_{jk}]$ em $M_n(\mathbb{C})$ é **anti-hermitiana**, se e somente se, $A=-A^*$, ou seja, $z_{jk}=-\overline{z_{kj}}$ para todo j e para todo k em $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$.

Observação 1.1.46 Uma matriz $A=[z_{jk}]$ quadrada em $M_n(\mathbb{C})$, com $z_{jk}=a_{jk}+ib_{jk}$, é anti-hermitiana, se e somente se,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}+ib_{11} & a_{12}+ib_{12} & \cdots & a_{1n}+ib_{1n} \\ a_{21}+ib_{21} & a_{22}+ib_{22} & \cdots & a_{2n}+ib_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+ib_{n1} & a_{n2}+ib_{n2} & \cdots & a_{nn}+ib_{nn} \end{bmatrix} = -A^* = \begin{bmatrix} -a_{11}+ib_{11} & -a_{21}+ib_{21} & \cdots & -a_{n1}+ib_{n1} \\ -a_{12}+ib_{12} & -a_{22}+ib_{22} & \cdots & -a_{n2}+ib_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n}+ib_{1n} & -a_{2n}+ib_{2n} & \cdots & -a_{nn}+ib_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_{kk}+ib_{kk} &= -a_{kk}+ib_{kk} \\ a_{kj}+ib_{kj} &= -a_{jk}+ib_{jk} \end{cases} \text{ para todo } j \text{ e para todo } k \text{ em } \{1,2,\cdots,n\}.$$

Logo, devemos ter $a_{kk}=0$ para todo k e $\begin{cases} a_{kj} &= -a_{jk} \\ b_{kj} &= b_{jk} \end{cases}$ para todo j e todo k.

Consequentemente, a diagonal principal de uma matriz anti-hermitiana $A=[z_{jk}]$ é constituída apenas de números imaginários puros e $a_{kj}+ib_{kj}=-a_{jk}+ib_{jk}$ para todo j e todo k em $\{1,2,3,4\}$.

Exemplo 1.1.47 $A=\begin{bmatrix} 0 & 4-7i & 3+4i & -3-2i \\ -4-7i & 3i & 7+6i & -1-3i \\ -3+4i & -7+6i & -4i & 2+5i \\ 3-2i & 1-3i & -2+5i & 11i \end{bmatrix}$ é uma matriz anti-hermitiana, pois os elementos da diagonal principal são imaginários puros e

Proposição 1.1.48 Se A é uma matriz em $M_n(\mathbb{C})$ e $\kappa\in\mathbb{R}$, então:

(i) A matriz $\kappa\cdot(A+A^*)$ é hermitiana.

(ii) A matriz $\kappa\cdot(A-A^*)$ é anti-hermitiana.

(iii) Toda matriz quadrada em $M_n(\mathbb{C})$ é a soma de uma matriz hermitiana com uma matriz anti-hermitiana.

Demonstração: Seja $A\in M_n(\mathbb{C})$, então temos:

(i) $\big(\kappa\cdot(A+A^*)\big)^* \overset{CT_3}{=} \overline{\kappa}\cdot(A+A^*)^* \overset{\kappa\in\mathbb{R}}{=} \kappa\cdot(A+A^*)^* \overset{CT_2}{=} \kappa\cdot\big(A^*+(A^*)^*\big) \overset{CT_1}{=} \kappa\cdot(A^*+A)$.

Portanto, $\kappa\cdot(A+A^*)$ é hermitiana.

(ii) $\big(\kappa\cdot(A-A^*)\big)^* \overset{CT_3}{=} \overline{\kappa}\cdot(A-A^*)^* \overset{\kappa\in\mathbb{R}}{=} \kappa\cdot(A-A^*)^* \overset{CT_2}{=} \kappa\cdot\big(A^*+(-A^*)^*\big)$
$\overset{CT_3}{=} \kappa\cdot\big(A^*-(A^*)^*\big) \overset{CT_1}{=} \kappa\cdot(A^*-A) = -\big(\kappa\cdot(A-A^*)\big)$.

Portanto, $\kappa\cdot(A-A^T)$ é anti-hermitiana.

(iii) Observemos que $A = \frac{1}{2}\left(A + A + A^* - A^*\right) = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^*)}_{\text{por (i) é hermitiana}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^*)}_{\text{por (ii) é anti-hermitiana}}$.

■

Matriz Normal Complexa

Definição 1.1.25 Uma matriz A quadrada em $M_n(\mathbb{C})$ é **normal complexa** se, e somente se,

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A,$$

ou seja, se e somente se, o produto de A por sua conjugada transposta A^* é comutativo.

Observações 1.1.49 (a) Toda matriz hermitiana é matriz normal, pois

$$A \cdot A^* \overset{A=A^*}{=} A \cdot A \overset{A=A^*}{=} A^* \cdot A.$$

(b) Toda matriz anti-hermitiana é matriz normal, pois

$$A \cdot A^* \overset{A^*=-A}{=} A \cdot (-A) \overset{A=-A^*}{=} (-A^*) \cdot (-A) = A^* \cdot A.$$

(c) Se A é matriz quadrada em $M_n(\mathbb{C})$ que é a soma de uma matriz anti-hermitiana e uma matriz escalar real, então A é matriz normal.

De fato, suponhamos que $A = E + H$, com E matriz escalar e H matriz anti-hermitiana, então:

$$\begin{aligned} A \cdot A^T &= (E+H) \cdot (E+H)^* = (E+H) \cdot (E^* + H^*) \overset{E^*=E \ H^*=-H}{=} (E+H) \cdot (E-H) \\ &= E^2 + H \cdot E - E \cdot H - H^2 \overset{EH=HE}{=} E^2 - H^2. \end{aligned}$$

Analogamente, $A^T \cdot A = E^2 - H^2$.

Portanto, A é normal.

Exemplo 1.1.50 $A = \begin{bmatrix} i & 1+i & 2 & 3-i \\ -1+i & 5i & 4+7i & -9i \\ -2 & -4+7i & -i & 11 \\ -3-i & -9i & -11 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz complexa normal, pois

$$A^* = \begin{bmatrix} -i & -1-i & -2 & -3+i \\ 1-i & -5i & -4-7i & 9i \\ 2 & 4-7i & i & -11 \\ 3+i & 9i & 11 & 0 \end{bmatrix} = -A.$$

Logo, A é anti-hermitiana e, portanto normal.

Matriz Unitária

Definição 1.1.26 Uma matriz quadrada A em $M_n(\mathbb{C})$ é **unitária** se, e somente se, $A \cdot A^* = I_n$.

Exemplo 1.1.51 A matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}i & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{bmatrix}$ é unitária.

$$A \cdot A^* = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}i & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}i & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{bmatrix}^T$$

De fato:

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}i & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}i & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, A é unitária.

1.1.5 Operações Elementares sobre as Linhas de uma Matriz

No que segue dada uma matriz A em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ vamos indicar a i-ésima linha de A por L_i e a j-ésima coluna de A por C_j, as operações elementares sobre as linhas (ou colunas) de uma matriz são:

OE_1 Permutação de duas linhas (duas colunas), ou seja, permutamos a i-ésima linha com a j-ésima linha (ou i-ésima coluna com a j-ésima coluna).

Notação: $L_i \longleftrightarrow L_j \quad (C_i \longleftrightarrow C_j)$.

OE_2 Substituição de uma linha (ou coluna) por ela previamente multiplicada por um número (real ou complexo) não nulo, ou seja, substituímos a i-ésima linha pela i-ésima linha multiplicada por número não nulo κ (ou i-ésima coluna pela i-ésima coluna multiplicada por número não nulo κ).

Notação: $L_i \longrightarrow \kappa\, L_i \quad (C_i \longrightarrow \kappa\, C_i)$.

OE_3 Substituição de uma linha (ou coluna) por ela somada com outra linha (ou coluna) previamente multiplicada por um número (real ou complexo) não nulo, ou seja, substituímos a i-ésima linha pela i-ésima linha somada com a j-ésima linha multiplicada por número não nulo κ (ou i-ésima coluna pela i-ésima coluna somada com a j-ésima coluna multiplicada por número não nulo κ).

Notação: $L_i \longrightarrow L_i + \kappa\, L_j \quad (C_i \longrightarrow C_i + \kappa\, C_j)$.

Exemplos 1.1.52 Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & 7 & -10 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 6 & -11 & 15 & -7 \end{bmatrix}$, determine a matriz:

(a) B obtida de A pela operação elementar $L_2 \longleftrightarrow L_4$.

(b) C obtida de A pela operação elementar $L_1 \longrightarrow (-3)L_1$.

(c) D obtida de A pela operação elementar $L_5 \longrightarrow L_5 + 2L_3$.

Solução:

(a) $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ -3 & 7 & -10 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & -11 & 15 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ L_2 \longleftrightarrow L_4 \end{matrix}$.

(b) $C = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & 7 & -10 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 6 & -11 & 15 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \longleftrightarrow (-3)L_1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$.

(c) $D = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & 7 & -10 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ L_5 \longleftrightarrow L_5 + 2L_3 \end{matrix}$

1.2 Determinante de uma Matriz Quadrada

Motivação

Na ***Geometria Analitica*:**

- Se dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2)$ no plano determinam um paralelogramo $\mathscr{P}_{\vec{u},\vec{w}}$, então sua área é dada por área$(\mathscr{P}_{\vec{u},\vec{w}}) = \left|D\right|$, com $D = u_1 w_2 - u_2 w_1$.

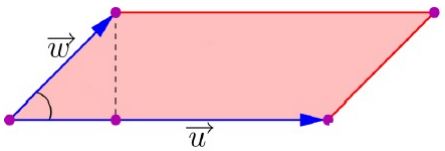


Figura 1.2.1: *Paralelogramo $\mathscr{P}_{\vec{u},\vec{w}}$ determinado por $\vec{u}$ e $\vec{w}$*

Desse desenvolvimento, se $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ e $R = (x_3, y_3)$ são pontos não colineares no plano, obtemos a fórmula de cálculo da área do triângulo $\triangle PQR$ dada por: área$(\triangle PQR) = \left|D\right|$, com $D = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2$, que veremos ser o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$.

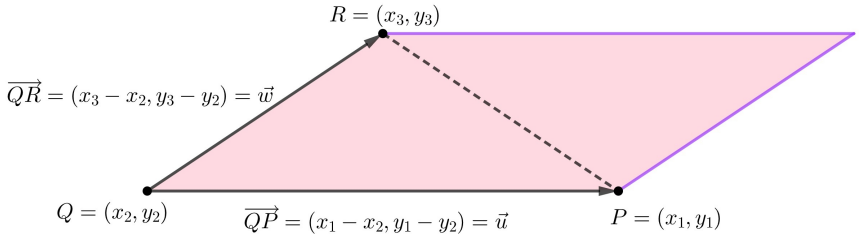


Figura 1.2.2: *Triângulo $\triangle PQR$ no paralelogramo PQR*

- Se três vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ no espaço tridimensional determinam um paralelepípedo $\mathscr{P}_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$, então seu volume é dado por volume$(\mathscr{P}_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}}) = \left|D\right|$, com $D = u_1(v_2w_3 - v_3w_2) - u_2(v_1w_3 - v_3w_1) + u_3(v_1w_2 - v_2w_3)$.

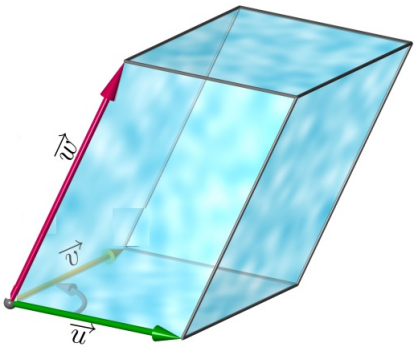


Figura 1.2.3: *Paralelepípedo $\mathscr{P}_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$ determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$*

Em ***Sistemas Lineares*:**

- Seja $S: \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ um sistema linear, nas variáveis x e y, em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}$.

  Multiplicando a 1ª equação por a_{21} e a 2ª equação por a_{11} obtemos:

  $$\begin{cases} a_{21}a_{11}x + a_{21}a_{12}y = a_{21}b_1 \\ a_{11}a_{21}x + a_{11}a_{22}y = a_{11}b_2 \end{cases},$$

  subtraindo a 2ª equação da 1ª obtemos: $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$.

  Consequentemente, se $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, então $y = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{D}$ e $x = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{D}$.

- De maneira análoga dado $S: \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$ um sistema linear, nas variáveis x, y e z, em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}$.

  Veremos na **Seção 2.3.4** que se

  $$D = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \neq 0,$$

  então $x = \dfrac{D_1}{D}$, $y = \dfrac{D_2}{D}$ e $z = \dfrac{D_3}{D}$, com

  $$D_1 = b_1(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(b_2a_{33} - a_{23}b_3) + a_{13}(b_1a_{32} - a_{22}b_3),$$

  $$D_2 = a_{11}(b_2a_{33} - a_{23}b_3) - b_1(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}b_3 - b_2a_{31}),$$

  $$D_3 = a_{11}(a_{22}b_3 - b_2a_{32}) - a_{12}(a_{21}b_3 - b_2a_{31}) + b_1(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Veremos também que os números D, D_1, D_2 e D_3 são, respectivamente, os determinantes das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix} \text{ e } A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}.$$

1.2.1 Definição de Determinante

Historicamente a noção de determinante surgiu dissociada das matrizes quadradas, na verdade estava associada à obtenção de solução de sistemas de equações lineares.

Em geral conhecemos a definição por recorrência que cumina no **Teorema de Laplace**, porém como funcional o determinante pode ser definido utilizado a noção de permutação. Aqui apresentaremos esta definição, porém trabalharemos com a definição por recorrência para demonstrar as propriedades.

Definição 1.2.1 Uma **permutação** de um conjunto finito A é uma bijeção $\sigma : A \longrightarrow A$.

Observação 1.2.1 Indicamos por S_n o conjunto de todas as permutações de um conjunto finito com n elementos. Logo, $\#S_n = n!$.

Vamos indicar a permutação σ por $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma(1) \\ \sigma(2) \\ \vdots \\ \sigma(n) \end{bmatrix}$, logo $\sigma = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$ é a identidade, que vamos indicar por σ_0.

Definição 1.2.2 Dizemos que uma permutação é uma **transposição** quando apenas dois elementos são permutados e os demais ficam fixos.

Observação 1.2.2 Vamos indicar σ_{ij} a transposição que permuta os elementos i e j, ou seja, $\sigma_{ij}(x) = \begin{cases} j, & \text{se} \quad x = i \\ i, & \text{se} \quad x = j \\ x, & \text{se} \quad x \neq i \text{ e } x \neq j. \end{cases}$.

Exemplos 1.2.3 (a) A permutação $\sigma = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ é uma transposição, pois $\sigma(1) = 2$ e $\sigma(2) = 1$ e não há outros elementos a serem permutados.

(b) A permutação $\sigma = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ é uma transposição, pois $\sigma(1) = 4$ e $\sigma(4) = 1$ e os demais elementos permanecem fixos.

Observação 1.2.4 Se um caminho para transformar uma permutação σ na permutação identidade σ_0 é feito com um número par (ímpar) de transposições, então qualquer outro caminho será feito com um número par (ímpar) de transposições.

Com a observação acima podemos estabelecer a seguinte definição:

Definição 1.2.3 Dizemos que uma permutação é uma **permutação par** (**permutação ímpar**) se para transformar $\begin{bmatrix} \sigma(1) \\ \sigma(2) \\ \vdots \\ \sigma(n) \end{bmatrix}$ em $\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$ é necessários aplicar um número par (ímpar) de transposições.

Exemplos 1.2.5 (a) Toda transposição é uma permutação ímpar.

De fato, dada uma transposição $\sigma_{ij}(x) = \begin{cases} j, & \text{se} \quad x = i \\ i, & \text{se} \quad x = j \\ x, & \text{se} \quad x \neq i \text{ e } x \neq j. \end{cases}$

Logo, $\sigma_{ij}\big(\sigma_{ij}(x)\big) = \begin{cases} \sigma_{ij}(j), & \text{se} \quad x = i \\ \sigma_{ij}(i), & \text{se} \quad x = j \\ \sigma_{ij}(x), & \text{se} \quad x \neq i \text{ e } x \neq j, \end{cases} = \begin{cases} i, & \text{se} \quad x = i \\ j, & \text{se} \quad x = j \\ x, & \text{se} \quad x \neq i \text{ e } x \neq j, \end{cases}$ portanto $\sigma_{ij} \circ \sigma_{ij} = \sigma_0$, consequentemente σ_{ij} é ímpar.

(b) A permutação $\sigma = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ é par ou ímpar?

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sigma_{12}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sigma_{23}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sigma_{35}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sigma_{45}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Como são utilizadas 4 transposições para chegar a σ_0, então σ é permutação par.

Definição 1.2.4 O **sinal de uma permutação** σ, indicado por sinal (σ), é dado por:

$$\text{sinal } (\sigma) = \begin{cases} +, & \text{se} \quad \sigma \text{ é par} \\ -, & \text{se} \quad \sigma \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Enfim estamos em condições de apresentar a definição do determinante de uma matriz quadrada qualquer.

Definição 1.2.5 (**Definição via permutações**) Seja A uma matriz quadrada em $M_n(\mathbb{K})$, com $n \geq 1$, o **determinante** de A, denotado por $\det A$ ou $\big|A\big|$, é o seguinte número em $\mathbb{K}$:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n!} \text{sinal } (\sigma_k) \cdot a_{1\sigma_k(1)}\, a_{2\sigma_k(2)} \cdots a_{n\sigma_k(n)},$$

com σ_k, para $k \in \{1, \cdots, n!\}$, todas as permutações de n elementos.

Exemplos 1.2.6 (a) Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, como as permutações de dois elementos são $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, a primeira permutação par e a segunda permutação ímpar, então:

$$\det A = a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)} - a_{1\sigma_2(1)}a_{2\sigma_2(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(b) Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, como as permutações de três elementos são

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_6 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

as três primeiras permutações pares e as três últimas permutações ímpares, então:

$$\begin{aligned}\det A &= a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)}a_{3\sigma_1(3)} + a_{1\sigma_2(1)}a_{2\sigma_2(2)}a_{3\sigma_2(3)} + a_{1\sigma_3(1)}a_{2\sigma_3(2)}a_{3\sigma_3(3)} \\ &- a_{1\sigma_4(1)}a_{2\sigma_4(2)}a_{3\sigma_4(3)} - a_{1\sigma_5(1)}a_{2\sigma_5(2)}a_{3\sigma_5(3)} - a_{1\sigma_6(1)}a_{2\sigma_6(2)}a_{3\sigma_6(3)} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.\end{aligned}$$

Com esses dois exemplos vemos que com a definição acima não é nada fácil calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem ≥ 4. Vamos então apresentar a definição por recorrência e as propriedades de determinante que nos permitirá fazer esses cálculos de maneira mais direta.

Determinante caso $n = 1$

Definição 1.2.6 Se $A = [a_{11}]$ quadrada em $M_1(\mathbb{K})$, então $\det A = a_{11}$, neste caso o determinante é o valor numérico da única entrada da matriz.

Exemplos 1.2.7 (a) $A = [-3]$, então $\det A = -3$. (b) $A = [7]$, então $\det A = 7$.

Para os casos em que A está em $M_n(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$, necessitamos definir o sinal dos elementos de A:

Sinal de um Elemento $a_{ij} \in A$

Dada $A = [a_{ij}]$ matriz em $M_n(\mathbb{K})$, a cada elemento a_{ij} de A atribuímos um **sinal**: $+$ ou $-$, da seguinte maneira:

$$\text{sinal } (a_{ij}) = \begin{cases} + & \text{se} \quad i+j \quad \text{é par} \\ - & \text{se} \quad i+j \quad \text{é ímpar} \end{cases}, \qquad \text{ou seja,} \qquad \text{sinal } (a_{ij}) = (-1)^{i+j}.$$

Exemplos 1.2.8 (a) Os sinais de uma matriz A em $M_2(\mathbb{K})$: $\begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix}$.

(b) Os sinais de uma matriz A em $M_2(\mathbb{K})$: $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$.

Cofator de um Elemento a_{ij}

Definição 1.2.7 Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$ quadrada em $M_n(\mathbb{K})$ **o cofator do elemento** de a_{ij}, denotado por Δ_{ij}, é o seguinte número em $\mathbb{K}$:

$$\Delta_{ij} = \text{sinal } (a_{ij}) \cdot \det A_{ij} \;=\; (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij},$$

com A_{ij} a matriz quadrada em $M_{n-1}(\mathbb{K})$ obtida de A retirando a i-ésima linha e a j-ésima coluna.

A matriz dos cofatores de A é chamada **matriz cofatora** de A e denotada por $\text{cof}(A)$, ou seja, $\text{cof}(A) = [\Delta_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$.

Exemplo 1.2.9 Encontre os cofatores da matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$.

Solução:

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 7 = 7$ $\qquad$ $\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 4 = -4$

$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3$ $\qquad$ $\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-1) = -1.$

Logo, $\text{cof } (A) = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$.

Definição 1.2.8 Seja A uma matriz quadrada em $M_n(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$, o **determinante** de A, denotado por $\det A$, é o número dado pela soma dos elementos de uma linha ou coluna qualquer de A, previamente multiplicados por seus respectivos cofatores.

Assim, o cálculo de $\det A$ pela i-ésima linha é:

$$\det A = a_{i1} \cdot \Delta_{i1} + a_{i2} \cdot \Delta_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot \Delta_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \Delta_{ik}.$$

Enquanto, que o cálculo de $\det A$ pela j-ésima coluna é:

$$\det A = a_{1j} \cdot \Delta_{1j} + a_{2j} \cdot \Delta_{i2} + \cdots + a_{nj} \cdot \Delta_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot \Delta_{kj}.$$

Cálculo de Determinante de uma Matriz Quadrada de ordem 2

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

uma matriz quadrada em $M_2(\mathbb{K})$, o determinante de A, pela primeira linha é:

$$\det A = a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{12} \cdot \Delta_{12} = a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot (-a_{21}) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Calculando pela segunda coluna obtemos:

$$\det A = a_{12} \cdot \Delta_{12} + a_{22} \cdot \Delta_{22} = a_{12} \cdot (-a_{21}) + a_{22} \cdot a_{22} = -a_{12} \cdot a_{21} + a_{22} \cdot a_{11} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Portanto,

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21},$$

ou seja, é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

Exemplo 1.2.10 Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$.

Solução:
Pelo desenvolvimento acima temos:

$$\det A = (-1) \cdot 7 - 3 \cdot 4 = -7 - 12 = -19.$$

Se dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2)$ no plano determinam um paralelogramo $\mathscr{P}_{\vec{u},\vec{w}}$, então sua área é dada por $\text{área}(\mathscr{P}_{\vec{u},\vec{w}}) = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \right| = |u_1 w_2 - u_2 w_1|$.

Observação 1.2.11 Dada uma matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ uma matriz quadrada em $M_n(\mathbb{K})$, também indicamos o determinante de A por:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Cálculo de Determinante de uma Matriz Quadrada de ordem 3

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

uma matriz quadrada em $M_3(\mathbb{K})$, o determinante de A, pela primeira linha é:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}\cdot\Delta_{11} + a_{12}\cdot\Delta_{12} + a_{13}\cdot\Delta_{13} \\ &= a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\cdot\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\cdot\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\cdot\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Calculando pela terceira coluna obtemos:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{13}\cdot\Delta_{13} + a_{23}\cdot\Delta_{23} + a_{33}\cdot\Delta_{33} \\ &= a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{13}\cdot\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right) - a_{23}\cdot\left(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}\right) + a_{33}\cdot\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) \\ &= a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{11}a_{32} + a_{23}a_{12}a_{31} + a_{33}a_{11}a_{22} - a_{33}a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

Assim, $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

Exemplo 1.2.12 Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Solução:

Calculando pela terceira linha temos

$$\begin{aligned} \det A &= 2\cdot\Delta_{31} + 3\cdot\Delta_{32} + 2\cdot\Delta_{33} \\ &= 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2\cdot(1-1) - 3\cdot(2-1) + 2\cdot(2-1) = 0 - 3 + 2 = -1. \end{aligned}$$

Calculemos também pela primeira coluna:

$$\begin{aligned} \det A &= 2\cdot\Delta_{12} + 1\cdot\Delta_{22} + 2\cdot\Delta_{32} \\ &= 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2\cdot(2-3) + (-1)\cdot(2-3) + 2\cdot(1-1) = -2 + 1 + 0 = -1. \end{aligned}$$

Observação 1.2.13 O cálculo do determinante de matrizes quadradas em $M_n(\mathbb{K})$, com $n \geq 4$, é feito recorrentemente.

- No cálculo de det A, com A quadrada em $M_4(\mathbb{K})$, deveremos calcular o determinante de 4 matrizes quadradas em $M_3(\mathbb{K})$.
- No cálculo de det A, com A quadrada em $M_5(\mathbb{K})$, deveremos calcular o determinante de 5 matrizes quadradas em $M_4(\mathbb{K})$.
- De modo geral, no cálculo de det A, com A quadrada em $M_n(\mathbb{K})$, deveremos calcular o determinante de n matrizes quadradas em $M_{n-1}(\mathbb{K})$.

Exemplo 1.2.14 Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução:

Calculando pela terceira coluna temos

$$\begin{aligned}
\det A &= 2\cdot\Delta_{13} + 0\cdot\Delta_{23} + 1\cdot\Delta_{33} + 0\cdot\Delta_{43} \\
&= 2\cdot\underbrace{(-1)^{1+3}\cdot\det A_{13}}_{\Delta_{13}} + 1\cdot\underbrace{(-1)^{3+3}\cdot\det A_{33}}_{\Delta_{33}} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2\cdot\underbrace{\left(2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right)}_{\text{cálculo pela 1ª linha}} + \underbrace{\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right)}_{\text{cálculo pela 1ª linha}} \\
&= 2\cdot\big(2\times 1 - (-1) + (-1)\big) + \big(2 + 0 + 3\times(-4)\big) = 2\cdot(2+1-1) + (2-12) = -6.
\end{aligned}$$

Logo, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6.$

1.2.2 Propriedades de Determinantes

Seja A uma matriz quadrada em $M_n(\mathbb{K})$, valem as seguintes propriedades:

D_1 Se A possui uma linha ou uma coluna com todos os elementos nulo, então det $A = 0$.

D_2 Se A tem duas linhas ou duas colunas iguais, então det $A = 0$.

D_3 det $A =$ det A^T.

D_4 Se A é uma matriz diagonal, então o determinante de A é o produto dos elementos da diagonal principal.

D_5 Se A é uma matriz triangular (superior ou inferior), então o determinante de A é o produto dos elementos da diagonal principal.

D_6 Se $B = \kappa A$, com $\kappa \in \mathbb{K}$, então det $B = \kappa^n \cdot$ det A.

D_7 Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, então:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

ou seja, se duas matrizes coincidem, exceto em uma i-ésima linha, nesta linha os elementos de A são a soma dos elementos da i-ésima linha de B com os respectivos elementos da i-ésima linha de C, então

$$\det A = \det B + \det C.$$

A propriedade também é válida se B e C coincidem exceto na j-ésima coluna e A coincide com as matrizes B e C, exceto na j-ésima coluna nesta coluna os elementos de A são a soma dos elementos da j-ésima coluna de B com os respectivos elementos da j-ésima coluna de C.

D_8 Se $A \in M_n(\mathbb{C})$, então $\det \overline{A} = \overline{\det A}$.

Verificação:

D_1 Seja uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n} \in M_n(\mathbb{K})$, tal que todos elementos da i-ésima linha são nulos, ou seja, $a_{ik} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, com $1 \leq k \leq n$, portanto:

$$\det A \overset{i^{\underline{a}}\text{ linha}}{=} a_{i1}\cdot\Delta_{i1} + a_{i2}\cdot\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\cdot\Delta_{in} \overset{a_{ik}=0,\ \forall k}{=} 0\cdot\Delta_{i1} + 0\cdot\Delta_{i2} + \cdots + 0\cdot\Delta_{in} = 0.$$

Analogamente, se todos os elementos da j-ésima coluna de A são todos nulos também teremos $\det A = 0$.

D_2 Mostremos por indução sobre n para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

Seja $A \in M_2(\mathbb{K})$, se a $2^{\underline{a}}$linha é igual à $1^{\underline{a}}$linha, temos $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$, e portanto $\det A = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11} = 0$, o mesmo ocorre se duas colunas são iguais.

Logo, $A \in M_2(\mathbb{K})$ tem duas linhas ou duas colunas iguais, então $\det A = 0$.

Supondo que o resultado vale para toda matriz quadrada em $M_k(\mathbb{K})$, com $k \in \mathbb{N}$ e $2 \leq k \leq n-1$, mostremos que a propriedade vale para toda matriz em $M_n(\mathbb{K})$.

Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$, com $i^{\underline{a}}$ linha igual à $j^{\underline{a}}$ linha, supondo $i < j$, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ L_j = L_1 \\ \\ \\ \end{matrix},$$

calculando $\det A$ pela $r^{\underline{a}}$ linha, com $1 \leq r \leq n$, $r \neq i$ e $r \neq j$ temos:

$$\det A \overset{r^{\underline{a}} \text{ linha}}{=} (-1)^{r+1} a_{r1} \det A_{r1} + (-1)^{r+2} \det A_{r2} + \cdots + (-1)^{r+n} \det A_{rn},$$

com A_{rs}, para $1 \leq s \leq n$, a matriz obtida de A retirando a $r^{\underline{a}}$ linha e $s^{\underline{a}}$ coluna, como cada uma das matrizes $A_{rs} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ tem duas linhas iguais, correspondentes às $i^{\underline{a}}$ e $j^{\underline{a}}$ linhas de A, portanto pela hipótese de indução segue que $\det A_{rs} = 0$ para todo s.

Consequentemente, $\det A = 0$.

Analogamente, se duas colunas de A são iguais segue também que $\det A = 0$.

Portanto, se $A \in M_n(\mathbb{K})$, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, tem duas linhas ou duas colunas iguais, então $\det A = 0$.

D_3 Mostremos por indução sobre n para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ uma matriz quadrada qualquer em $M_2(\mathbb{K})$, $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$, logo $\det A^T = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det A$.

Portanto, a propriedade vale para $n = 2$.

Supondo que o resultado vale para toda matriz quadrada em $M_k(\mathbb{K})$, com $k \in \mathbb{N}$ e $2 \leq k \leq n-1$, mostremos que a propriedade vale para toda matriz em $M_n(\mathbb{K})$.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ uma matriz qualquer em $M_n(\mathbb{K})$, então:

$$\det A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{1^{\underline{a}} \text{ linha}}{=} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+1} a_{n2} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{n-1\,2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{n-1\,n} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Hip. Indução}}{=} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+1} a_{n2} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n} \end{vmatrix}$$

$$\overset{1^{\underline{a}} \text{ coluna}}{=} \det A.$$

Portanto, se $A \in M_n(\mathbb{K})$, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, então $\det A^T = \det A$.

D_4 Mostremos por indução sobre n para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ uma matriz diagonal qualquer em $M_2(\mathbb{K})$, então $\det A = a_{11}a_{22}$.

Portanto, a propriedade vale para $n = 2$.

Supondo que o resultado vale para toda matriz diagonal em $M_k(\mathbb{K})$, com $k \in \mathbb{N}$ e $2 \leq k \leq n-1$, mostremos que a propriedade vale para toda matriz diagonal em $M_n(\mathbb{K})$.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$ uma matriz diagonal em $M_n(\mathbb{K})$, então:

$$\det A \overset{n^{\underline{a}} \text{ linha}}{=} a_{nn} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix} = a_{nn} \cdot \underbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{(n-1)(n-1)}}_{\text{Hipótese de Indução}} \cdot$$

Portanto, se $A \in M_n(\mathbb{K})$ é uma matriz diagonal, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, então $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{(n-1)(n-1)} \cdot a_{nn}$.

D_5 Faremos a demonstração por indução sobre n, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, para matriz triangular superior, o caso inferior se verifica de maneira análoga.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ uma matriz triangular superior qualquer em $M_2(\mathbb{K})$, então $\det A = a_{11}a_{22}$.

Portanto, a propriedade vale para $n = 2$.

Supondo que o resultado vale para toda matriz triangular superior em $M_k(\mathbb{K})$, com $k \in \mathbb{N}$ e $2 \leq k \leq n-1$, mostremos que a propriedade vale para toda matriz triangular superior em $M_n(\mathbb{K})$.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$ uma matriz triangular superior em $M_n(\mathbb{K})$, então:

$$\det A \overset{n^{\underline{a}} \text{ linha}}{=} a_{nn} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix} = a_{nn} \cdot \underbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{(n-1)(n-1)}}_{\text{Hipótese de Indução}} \cdot$$

Logo, se $A \in M_n(\mathbb{K})$ é uma matriz triangular superior, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, então $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{(n-1)(n-1)} \cdot a_{nn}$.

D_6 Mostremos por indução sobre n para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$, então dados $\kappa \in \mathbb{K}$, então $\kappa \cdot A = \begin{bmatrix} \kappa \cdot a_{11} & \kappa \cdot a_{12} \\ \kappa \cdot a_{21} & \kappa \cdot a_{22} \end{bmatrix}$, então

$$\det A = \kappa \cdot a_{11} \times \kappa \cdot a_{22} - \kappa \cdot a_{12} \times \kappa \cdot a_{21} = \kappa^2 \cdot (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \kappa^2 \cdot \det A.$$

Portanto, a propriedade vale para $n = 2$.

Supondo que o resultado vale para toda matriz quadrada em $M_k(\mathbb{K})$, com $k \in \mathbb{N}$ e $2 \leq k \leq n-1$, mostremos que a propriedade vale para toda matriz em $M_n(\mathbb{K})$.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ uma matriz qualquer em $M_n(\mathbb{K})$, então

$$\kappa \cdot A = \begin{bmatrix} \kappa \cdot a_{11} & \kappa \cdot a_{12} & \cdots & \kappa \cdot a_{1n} \\ \kappa \cdot a_{21} & \kappa \cdot a_{22} & \cdots & \kappa \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa \cdot a_{n1} & \kappa \cdot a_{n2} & \cdots & \kappa \cdot a_{nn} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned}
\det(\kappa \cdot A) &\overset{1^{\underline{a}} \text{ linha}}{=} \kappa \cdot a_{11} \begin{vmatrix} \kappa \cdot a_{22} & \cdots & \kappa \cdot a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa \cdot a_{n2} & \cdots & \kappa \cdot a_{nn} \end{vmatrix} - \kappa \cdot a_{21} \begin{vmatrix} \kappa \cdot a_{12} & \cdots & \kappa \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa \cdot a_{n1} & \cdots & \kappa \cdot a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\quad + \cdots + (-1)^{n+1} \kappa \cdot a_{1n} \begin{vmatrix} \kappa \cdot a_{21} & \cdots & \kappa \cdot a_{2\,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa \cdot a_{n1} & \cdots & \kappa \cdot a_{n\,n-1} \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{Hip. Indução}}{=} \kappa \cdot a_{11} \kappa^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \kappa \cdot a_{12} \kappa^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\quad + \cdots + (-1)^{n+1} \kappa \cdot a_{1n} \kappa^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix} \\
&= \kappa^n \cdot \left(a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix} \right) \\
&= \kappa^n \cdot \det A.
\end{aligned}$$

Portanto, se $A \in M_n(\mathbb{K})$, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, então $\det(\kappa \cdot A) = \kappa^n \cdot \det A$.

D_7 De fato,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{i^{a}\text{ linha}}{=} (-1)^{i+1}(b_{i1}+c_{i1}) \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2}(b_{i2}+c_{i2}) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{i+n}(b_{in}+c_{in}) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+1}b_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2}b_{i2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{i+n}b_{in} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{i+1}c_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2}c_{i2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{i+n}c_{in} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

D_8 Na **Observação 1.1.42** vimos que, quaisquer que sejam z_1 e z_2 em $\mathbb{C}$, $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$ e $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

Aplicando estas propriedades no cálculo do determinante de $\overline{A}$ obtemos $\det \overline{A} = \overline{\det A}$.

■

Teorema 1.2.15 Seja A uma matriz em $M_n(\mathbb{K})$.

(i) Se B é matriz obtida de A permutando duas linhas (ou duas colunas), então $\det B = -\det A$.

(ii) Se B é obtida de A multiplicando todos os elementos de uma linha (ou uma coluna) por um número κ, então $\det B = \kappa \cdot \det A$.

(iii) Se B é obtida de A somando a uma linha (ou coluna) de A a uma outra linha (ou coluna) previamente multiplicada por um número qualquer, então $\det B = \det A$.

Demonstração:

(i) Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz em $M_n(\mathbb{K})$ e seja B a matriz obtida de A permutando a r-ésima linha e a s-ésima linha, ou seja, B é obtida de A fazendo a operação elementar $L_r \longleftrightarrow L_s$. Suponhamos sem perda de generalidade que $1 < r < s < n$, então:

$$0 \overset{\text{Prop. } D_1}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}+a_{s1} & a_{r2}+a_{s2} & \cdots & a_{rn}+a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}+a_{s1} & a_{r2}+a_{s2} & \cdots & a_{rn}+a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Prop. } D_7}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}+a_{s1} & a_{r2}+a_{s2} & \cdots & a_{rn}+a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}+a_{s1} & a_{r2}+a_{s2} & \cdots & a_{rn}+a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Prop. } D_7}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{Prop. } D_1}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Consequentemente,

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\det A.$$

(ii) Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz em $M_n(\mathbb{K})$ e seja B a matriz obtida de A multiplicando os elementos da r-ésima linha por uma constante κ, ou seja, B é obtida de A fazendo a operação elementar $L_r \longrightarrow \kappa\, L_r$. Suponhamos sem perda de generalidade que $1 < r < n$, então:

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa\cdot a_{r1} & \kappa\cdot a_{r2} & \cdots & \kappa\cdot a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &\overset{r^a \text{ linha}}{=} (-1)^{r+1}\kappa\cdot a_{r1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{r+2}\kappa\cdot a_{r2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{r+n}\kappa\cdot a_{1n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix} \\ &= \kappa\cdot \left((-1)^{r+1} a_{r1}\cdot \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{r+n} a_{rn}\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix} \right) \\ &= \kappa\cdot \det A. \end{aligned}$$

(iii) Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz em $M_n(\mathbb{K})$ e seja B a matriz obtida de A somando a r-ésima linha com a s-ésima linha, previamente multiplicada por uma constante κ, ou seja, B é obtida de A fazendo a operação elementar $L_r \longrightarrow L_r + \kappa\, L_s$. Suponhamos sem perda de generalidade que $1 < r < s < n$, então:

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}+\kappa\cdot a_{s1} & a_{r2}+\kappa\cdot a_{s2} & \cdots & a_{rn}+\kappa\cdot a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Prop. } D_7}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa \cdot a_{s1} & \kappa \cdot a_{s2} & \cdots & \kappa \cdot a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Teo. 1.2.15 (ii)}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \kappa \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Prop. } D_1}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A.$$

■

Corolário 1.2.16 Seja A uma matriz quadrada em $M_n(\mathbb{K})$, se A tem duas linhas (ou duas colunas) proporcionais, então $\det A = 0$.

Demonstração: Suponhamos que A tem duas linhas proporcionais, dígamos $L_j = \kappa\, L_i$, com $\kappa \in \mathbb{K}$.

Logo, efetuando a operação elementar $L_j \longrightarrow L_j - \kappa\, L_i$ em A obtemos uma matriz quadrada B tal que sua j-ésima linha é nula, consequentemente pela propriedade D_2 temos $\det B = 0$.

Portanto, pelo **Teorema 1.2.15 (iii)** acima, segue que $\det A = \det B = 0$. ■

Definição 1.2.9 Seja I_m a identidade de ordem m, indicando por:

$E^m_{i\leftrightarrow j}$ a matriz obtida de I_m efetuando a operação elementar $L_i \longleftrightarrow L_j$;

$E^m_{i\to \kappa i}$, com $\kappa \in \mathbb{K}^*$, a matriz obtida de I_m efetuando a operação elementar $L_i \longrightarrow \kappa\, L_i$;

$E^m_{i\to i+\kappa j}$ a matriz obtida de I_m efetuando a operação elementar $L_i \longrightarrow L_i + \kappa L_j$.

As matrizes $E^m_{i\leftrightarrow j}$, $E^m_{i\to \kappa i}$ e $E^m_{i\to i+\kappa j}$, obtida da identidade I_m efetuando uma única operação elementar, são chamadas **matrizes elementares**.

Observação 1.2.17 Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, então:

- $E^m_{i\leftrightarrow j}\cdot A$ é a matriz obtida de A efetuando a mesma operação elementar, $L_i \longleftrightarrow L_j$ permutação de linha, e mais:

$$E^m_{i\leftrightarrow j}\cdot(E^m_{i\leftrightarrow j}\cdot A) \;=\; A.$$

- $E^m_{i\to\kappa i}\cdot A$ é a matriz obtida de A efetuando a mesma operação elementar,$L_i \longrightarrow L_i + \kappa L_j$ com $\kappa \neq 0$, e mais:

$$E^m_{i\to\frac{1}{\kappa}i}\cdot(E^m_{i\to\kappa i}\cdot A) = A.$$

- $E^m_{i\to i+\kappa j}\cdot A$ é a matriz obtida de A efetuando a mesma operação elementar, $L_i \longrightarrow L_i + \kappa L_j$, e mais:

$$E^m_{i\to i-\kappa j}\cdot(E^m_{i\to i+\kappa j}\cdot A) = A.$$

Corolário 1.2.18 Sejam $E^n_{i\leftrightarrow j}$, $E^n_{i\to\kappa i}$, com $\kappa\in\mathbb{K}^*$, e $E^n_{i\to i+\kappa j}$ as matrizes elementares correspondentes à I_n, matriz identidade de ordem n, então:

(i) $\det E^n_{i\leftrightarrow j} = -1, \qquad \det E^n_{i\to\kappa i} = \kappa \qquad \text{e} \qquad \det E^n_{i\to i+\kappa j} = 1.$

(ii) Para toda $A\in M_n(\mathbb{K})$, temos:

$$\det(E^n_{i\leftrightarrow j}\cdot A) = \det E^n_{i\leftrightarrow j}\cdot\det A = -\det A \qquad \det(E^n_{i\to\kappa i}\cdot A) = \kappa\cdot\det A = \det E^n_{i\to\kappa i}\cdot\det A$$

$$\text{e} \qquad \det(E^n_{i\to i+\kappa j}\cdot A) = \det A = \det E^n_{i\to i+\kappa j}\cdot\det A.$$

Demonstração:

(i) De fato, $\det I_n = 1$, como $E^n_{i\leftrightarrow j}$, $E^n_{i\to\kappa i}$ e $E^n_{i\to i+\kappa j}$ são obtidas de I_n efetuando as respectivas operações elementares $L_i \longleftrightarrow L_j$, $L_i \longrightarrow \kappa\, L_i$, com $\kappa\in\mathbb{K}^*$, e $L_i \longrightarrow L_i r + \kappa\, L_j$, segue pelo **Teorema 1.2.15** que:

$$\det E^n_{i\leftrightarrow j} = -1, \qquad \det E^n_{i\to\kappa i} = \kappa \qquad \text{e} \qquad \det E^n_{i\to i+\kappa j} = 1.$$

(ii) Vimos também na **Observação 1.2.17** que as matrizes $E^n_{i\leftrightarrow j}\cdot A$, $E^n_{i\to\kappa i}\cdot A$ e $E^n_{i\to i+\kappa j}\cdot A$ são obtidas de A efetuando, respectivamente, as operações elementares $L_i \longleftrightarrow L_j$, $L_i \longrightarrow \kappa\, L_i$, com $\kappa\in\mathbb{K}^*$, e $L_i \longrightarrow L_i + \kappa\, L_j$.

Logo, pelo **Teorema 1.2.15** e pelo item (i) acima, temos:

$$\begin{aligned}
\det(E^n_{i\leftrightarrow j}\cdot A) &= -\det A = \det E^n_{i\leftrightarrow j}\cdot\det A\\
\det(E^n_{i\to\kappa i}\cdot A) &= \kappa\cdot\det A = \det E^n_{i\to\kappa i}\cdot\det A\ .\\
\det(E^n_{i\to i+\kappa j}\cdot A) &= \det A = \det E^n_{i\to i+\kappa j}\cdot\det A
\end{aligned}$$

■

Exemplos 1.2.19 Calcule $\det B$, em cada um dos casos:

(a) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; (c) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$;

(d) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix}$; (e) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; (f) $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 9 & 6 \end{bmatrix}$;

(g) $B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; (h) $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (i) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Solução:

Lembrando que vimos acima que para $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ temos $\det A = -1$.

Observemos que as matrizes dos exemplos (a), (c), (d), (e) e (f) foram obtidas da matriz A.

(a) $\det B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{D_1,\ \text{pois } B=A^T}{=} -1.$

(b) $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \overset{D_3,\ \text{pois } C_1=C_2}{=} 0.$

(c) $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{D_4,\ \text{pois } L_1\leftrightarrow L_2}{=} -(-1) = 1.$

(d) $\det B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \end{vmatrix} \overset{D_5\ \text{pois } L_3\to(-2)L_3}{=} (-2)\times(-1) = 2.$

(e) $\det B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{D_6,\ \text{pois } L_3\to L_3-2L_2}{=} -1.$

(f) $\det B = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 9 & 6 \end{vmatrix} \overset{D_7,\ \text{pois } B=3A}{=} 3^3\times(-1) = -27.$

(g) $\det B = (-5)\times 8\times(-1)\times 3 = 120$, basta aplicar D_9, pois B é matriz diagonal.

(h) $\det B = 3\times 6\times(-2)\times 1 = -36$, basta aplicar D_{10}, pois B é matriz triangular.

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{D_{11}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{D_3\ \text{e}\ D_{10}}{=} 0-4 = -4.$

Observação 1.2.20 O Corolário 1.2.18 nos fornece uma maneira de calcular determinante utilizando as operações elementares.

De fato, dada $A \in M_n(\mathbb{K})$ efetuamos operações elementares em A de maneira a obter uma matriz B na forma triangular superior, dígamos que

$$E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = B \Longrightarrow \det(E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A) = \det B$$

$$\overset{\text{Cor. 1.2.18}}{\Longleftrightarrow} \det E_k \cdot \ldots \cdot \det E_2 \cdot \det E_1 \cdot \det A = \det B.$$

Como B é triangular superior pela **Propriedade** D_5 seu determinante é o produto dos elementos da diagonal e como as matrizes elementares são todas invertíveis, segue que:

$$\det A = \frac{1}{\det E_k \cdot \ldots \cdot \det E_2 \cdot \det E_1} \cdot \det B = \frac{b_{11} \cdot b_{22} \cdot \ldots \cdot b_{nn}}{\det E_k \cdot \ldots \cdot \det E_2 \cdot \det E_1}.$$

Exemplo 1.2.21 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, determine:

(a) Uma matriz B triangular superior equivalente à matriz A.

(b) O determinante da matriz A.

Solução:

(a) Efetuando operações elementares sobre as linhas de A obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \longrightarrow L_4 + 2L_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 + 4L_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} L_3 \longleftrightarrow L_4 \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Logo, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ é uma matriz triangular superior equivalente à matriz A.

(b) A matriz B é triangular, portanto $\det B = 1 \times 1 \times 3 \times (-4) = -12$.

Como a matriz B foi obtida de A efetuando operações elementares do tipo $L_i \longrightarrow L_i + kL_j$ e a operação elementar $L_3 \longleftrightarrow L_4$, então $det\ B = -\det A$, portanto $\det A = -\det B = 12$.

Teorema 1.2.22 Dadas A e B matrizes em $M_n(\mathbb{K})$, então $\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Faremos a demonstração deste teorema no final da **Seção 1.3 de Matriz Inversa**.

Proposição 1.2.23 (i) Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ é matriz anti-simétrica e n é ímpar, então $\det A = 0$.

(ii) Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ é matriz hermitiana, então $\det A \in \mathbb{R}$.

(iii) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é matriz ortogonal, então $\det A = 1$ ou $\det A = -1$.

(iv) Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ é matriz unitária, então $\det A = 1$ ou $\det A = -1$.

Demonstração:

(i) $A \in M_n(\mathbb{K})$ é anti-simétrica se, e somente se, $A^T = -A$.

Logo,

$$\det A^T = \det(-A) \overset{D_3 \text{ e } D_6}{\Longrightarrow} \det A = (-1)^n \cdot \det A \overset{n \text{ é ímpar}}{\Longrightarrow} \det A = -\det A \Longleftrightarrow \det A = 0.$$

(ii) $A \in M_n(\mathbb{C})$ é hermitiana se, e somente se, $A = A^* = \overline{A}^T$.

Logo,

$$\det A = \det A^* = \det(\overline{A}^T) \overset{D_3}{=} \det \overline{A} \overset{D_8}{=} \overline{\det A} \Longleftrightarrow \det A \in \mathbb{R}.$$

(iii) $A \in M_n(\mathbb{R})$ é ortogonal se, e somente se, $A \cdot A^T = I_n$.

Logo,

$$\det(A\cdot A^T) = \det I_n = 1 \overset{\text{Teo. 1.2.22}}{\Longrightarrow} \det A \cdot \det A^T = 1 \overset{D_1}{\Longrightarrow} (\det A)^2 = 1.$$

Portanto, $\det A = 1$ ou $\det A = -1$.

(iv) $A \in M_n(\mathbb{C})$ é unitária se, e somente se, $A \cdot A^* = I_n$.

Logo,

$$\det(A\cdot A^*) = \det I_n = 1 \overset{\text{Teo. 1.2.22}}{\Longrightarrow} \det A \cdot \det A^* = 1 \Longleftrightarrow \det A \cdot \det \overline{A}^T = 1$$

$$\overset{D_1}{\Longrightarrow} \det A \cdot \det \overline{A} = 1 \Longleftrightarrow \det A \cdot \overline{\det A} = 1 \Longleftrightarrow |\det A|^2 = 1.$$

Portanto, $\det A = 1$ ou $\det A = -1$.

■

1.3 Inversa de uma Matriz

Sabemos que multiplicação dos números reais ou complexos tem elemento neutro, o número 1, que também satisfaz a seguinte propriedade:

$$\text{Se } a \in \mathbb{K} \text{ e } a \neq 0, \text{ então existe } b \in \mathbb{K},\ b \neq 0 \text{ tal que } a \cdot b = 1.$$

Denotamos o número b por $b = a^{-1} = {}^1\!/_a$ e este é chamado **inverso multiplicativo** de a.

Pela propriedade $M_1\ (a)$ da multiplicação de matrizes sabemos que dada A uma matriz quadrada de ordem n, temos: $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, ou seja, a matriz I_n, identidade de ordem n, é o **elemento neutro da multiplicação** em $M_n(\mathbb{R})$ ou $M_n(\mathbb{C})$.

Daí é natural perguntar: *Se A é uma matriz quadrada em $M_n(\mathbb{K})$, quando existe uma matriz $B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que:*

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n. \tag{1.3.1}$$

Exemplos 1.3.1 Em cada um dos casos, verifique se existe uma matriz B, quadrada de ordem 2, tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_2$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

Solução:

(a) Devemos encontrar uma matriz $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b & a+3b \\ c+2d & c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a+c=1 \\ b+d=0 \\ 2a+3c=0 \\ 2b+3d=1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} a+2b=1 \\ a+3b=0 \\ c+2d=0 \\ c+3d=1 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} a+c=1 \\ 2a+3c=0 \end{cases} \\ \begin{cases} b+d=0 \\ 2b+3d=1 \end{cases} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \begin{cases} a+2b=1 \\ a+3b=0 \end{cases} \\ \begin{cases} c+2d=0 \\ c+3d=1 \end{cases} \end{cases}$$

Observemos que

$$\begin{cases} a+c=1 \\ 2a+3c=0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2a+2c=2 \\ 2a+3c=0 \end{cases} \Rightarrow c=-2 \Rightarrow a=3$$

e

$$\begin{cases} b+d=0 \\ 2b+3d=1 \end{cases} \sim \begin{cases} 2b+2d=0 \\ 2b+3d=1 \end{cases} \Rightarrow d=1 \Rightarrow b=-1.$$

Por outro lado,

$$\begin{cases} a+2b=1 \\ a+3b=0 \end{cases} \Rightarrow b=-1 \Rightarrow a=3 \quad \text{e} \quad \begin{cases} c+2d=0 \\ c+3d=1 \end{cases} \Rightarrow d=1 \Rightarrow c=-2.$$

Portanto, a matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaz a condição $A \cdot B = B \cdot A = I_2$.

(b) Devemos encontrar uma matriz $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} a-2c & b-2d \\ -2a+4c & -2b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-2b & -a+4b \\ c-2d & -c+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2c=1 \\ b-2d=0 \\ -2a+4c=0 \\ -2b+4d=1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} a-2b=1 \\ -2a+4b=0 \\ c-2d=0 \\ -c+4d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a-2c=1 \\ -2a+4c=0 \end{cases} \\ \begin{cases} b-2d=0 \\ -2b+4d=1 \end{cases} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \begin{cases} a-2b=1 \\ -2a+4b=0 \end{cases} \\ \begin{cases} c-2d=0 \\ -2c+4d=1 \end{cases} \end{cases}.$$

Observemos que o sistema $\begin{cases} a-2c=1 \\ -2a+4c=0 \end{cases}$ não tem solução, pois

$$\begin{cases} a-2c=1 \\ -2a+4c=0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2a-4c=2 \\ -2a+4c=0 \end{cases} \Rightarrow 0=2,$$

um absurdo!

Portanto, neste caso, não existe uma matriz B, quadrada de ordem 2, que satisfaz a condição $A\cdot B = B\cdot A = I_2$.

Observação 1.3.2 Os exemplos acima nos mostram que há casos em que resposta à pergunta da **Equação 1.3.1** é afirmativa e outros em que não.

Antes estabelecer uma condição necessária para a existência da matriz B que satisfaz 1.3.1 introduziremos mais alguns conceitos.

1.3.1 Matriz Adjunta e a Inversa

Definição 1.3.1 Seja A uma matriz quadrada em $M_n(\mathbb{K})$, a **matriz adjunta** de A, denotada por $\text{adj}(A)$, é a transposta da matriz cofatora de A, ou seja,

$$\text{adj}\,(A) = \big(\text{cof}\,(A)\big)^T.$$

Exemplo 1.3.3 Seja $A=[a_{ij}]$ uma matriz quadrada em $M_n(\mathbb{K})$, mostre que dados $i,\ j\in\{1,\cdots,n\}$, se $i\neq j$, então:

$$a_{i1}\cdot\Delta_{j1} \ + \ a_{i2}\cdot\Delta_{j2} \ +\cdots+ a_{in}\cdot\Delta_{jn} \ = \ 0.$$

Solução:

Como $i\neq j$, podemos considerar a matriz A', idêntica à matriz A, exceto na j-ésima linha, nesta colocamos uma cópia i-ésima linha de A, ou seja, para $1<i<j<n$ teremos:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \longleftarrow j-\text{ésima linha}.$$

Pela propriedade D_2, como a i-ésima e a j-ésima linhas de A' são iguais, segue que $\det A'=0$.

Como as matrizes A e A' coincidem, exceto na j-ésima linha, então os cofatores dos elementos desta linha de ambas as matrizes são iguais, ou seja, $\Delta_{j1}=\Delta'_{j1},\ \Delta_{j2}=\Delta'_{j2},\ \cdots,\ \Delta_{jn}=\Delta'_{jn}$.

Logo,

$$0=\det A' \overset{\text{pela j}^{\text{a}}\text{ linha}}{=} a_{i1}\cdot\Delta'_{j1}+a_{i2}\cdot\Delta'_{j2}+\cdots+a_{in}\cdot\Delta'_{jn}=a_{i1}\cdot\Delta_{j1}+a_{i2}\cdot\Delta_{j2}+\cdots+a_{in}\cdot\Delta_{jn}.$$

Teorema 1.3.4 Se A é uma matriz quadrada em $M_n(\mathbb{K})$, então

$$A \cdot \text{adj}\,(A) \;=\; \text{adj}\,(A) \cdot A \;=\; \det A \cdot I_n.$$

Demonstração: Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, então:

$$A \cdot \text{adj}\,(A) \;=\; \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} = [c_{ij}]_{n\times n},$$

com $c_{ij} = a_{i1}\cdot\Delta_{j1} + a_{i2}\cdot\Delta_{j2} + \cdots + a_{in}\cdot\Delta_{jn}$.

Pelo exemplo anterior se $i \neq j$, então $0 = a_{i1}\cdot\Delta_{j1} + a_{i2}\cdot\Delta_{j2} + \cdots + a_{in}\cdot\Delta_{jn} = c_{ij}$.

Por outro lado, se $i = j$ temos:

$$c_{ii} = a_{i1}\cdot\Delta_{i1} + a_{i2}\cdot\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\cdot\Delta_{in} \overset{\text{pela } i^{\text{a}} \text{ linha}}{=} \det A.$$

Portanto,

$$A \cdot \text{adj}\,(A) = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix}_{n\times n} = \det A \cdot I_n.$$

Analogamente mostramos que $\text{adj}\,(A)\cdot A = \det A \cdot I_n$. ■

Corolário 1.3.5 Se A é uma matriz quadrada em $M_n(\mathbb{K})$ e $\det A \neq 0$, então

$$\left(\frac{1}{\det A}\cdot\text{adj}\,(A)\right)\cdot A \;=\; A\cdot\left(\frac{1}{\det A}\cdot\text{adj}\,(A)\right) \;=\; I_n.$$

Demonstração: Seja A é uma matriz quadrada em $M_n(\mathbb{K})$, com $\det A \neq 0$, multiplicando a igualdade do **Teorema 1.3.4** por $1/\det A$ obtemos:

$$\frac{1}{\det A}\times\left(A\cdot\text{adj}\,(A)\right) \;=\; \frac{1}{\det A}\times\left(\text{adj}\,(A)\cdot A\right) \;=\; \frac{1}{\det A}\times\left(\det A\cdot I_n\right)$$

$$\overset{M_4}{\Longleftrightarrow} A\cdot\left(\frac{1}{\det A}\cdot\text{adj}\,(A)\right) \;=\; \left(\frac{1}{\det A}\cdot\text{adj}\,(A)\right)\cdot A \;=\; I_n.$$

■

Definição 1.3.2 Seja A uma matriz quadrada em $M_n(\mathbb{K})$, dizemos que A é **invertível** se, e somente se, existe B matriz quadrada em $M_n(\mathbb{K})$ tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n.$$

A matriz B é chamada **matriz inversa** de A e denotada por A^{-1}, assim,

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Exemplo 1.3.6 A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ é invertível e sua inversa é a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Teorema 1.3.7 Uma matriz quadrada A em $M_n(\mathbb{K})$ é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$.
Além disso, se $\det A \neq 0$, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } (A).$$

Demonstração:

Se A é invertível, então $A \cdot A^{-1} = I_n$, logo

$$\det (A \cdot A^{-1}) = \det I_n = 1 \overset{\text{Teo. 1.2.22}}{\Longrightarrow} \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Longrightarrow \det A \neq 0.$$

Reciprocamente, se $\det A \neq 0$, pelo **Corolário 1.3.5** e a **Definição 1.3.2**, A é invertível e

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } (A).$$

■

Exemplos 1.3.8 Verifique, em cada um dos casos abaixo, se a matriz A é invertível, em caso afirmativo determine sua inversa.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 & -3 \\ 7 & 0 & -8 & 11 \\ 12 & -9 & 4 & -21 \\ -15 & 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$.

Solução:

(a) Vimos na seção 1.2 que $\det A = -1 \neq 0$, portanto A é invertível.

Devemos determinar adj (A).

$$\text{adj } (A) = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Vimos na **seção 1.2** que $\det A = -6 \neq 0$, portanto A é invertível.

Devemos determinar adj (A).

$$\text{adj}\,(A) = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \Delta_{41} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} & \Delta_{42} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} & \Delta_{43} \\ \Delta_{14} & \Delta_{24} & \Delta_{34} & \Delta_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -10 & 11 \\ -4 & -3 & 8 & -7 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -10 & 11 \\ -4 & -3 & 8 & -7 \end{bmatrix}.$$

(c) Como $L_3 = -3L_1$, logo pela propriedade D_3 de determinantes, temos $\det A = 0$.

Portanto, A não é invertível.

1.3.2 Propriedades da Matriz Inversa

Sejam A e B quadradas em $M_n(\mathbb{K})$, valem as seguintes propriedades:

MI_1 Se A é invertível, então sua inversa é única.

MI_2 A e B são invertíveis se, e somente se, $A \cdot B$ é invertível.

Além disso, $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

MI_3 Se A é invertível, então A^T, a transposta de A, também é invertível.

Neste caso, $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

MI_4 Se A é invertível, então A^{-1}, a inversa de A, também é invertível.

Neste caso, $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

MI_5 Se A é invertível e $\lambda \in \mathbb{K}^*$, então $\lambda \cdot A$ é invertível.

Neste caso, $(\lambda \cdot A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$.

MI_6 Se $D = [d_{ij}]_{n\times n}$ é uma matriz diagonal com $d_{ii} \neq 0$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, então D é invertível.

Neste caso, $D^{-1} = [e_{ij}]_{n\times n}$ é a matriz diagonal com $e_{ii} = {}^1\!/_{d_{ii}}$.

MI_7 Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ é invertível, então $\overline{A}$ e A^*, a conjugada e a conjugada transposta de A também são invertíveis.

Neste caso, $\overline{A}^{-1} = \overline{A^{-1}}$ e $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

MI_8 (a) Se existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $A \cdot B = I_n$, então A é invertível.

(b) Se existe $C \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $B \cdot A = I_n$, então A é invertível.

Verificação:

MI_1 Se existissem B e C tais que $A \cdot B = A \cdot C = I_n$, multiplicando a igualdade $A \cdot C = I_n$ por B à esquerda obtemos

$$B \cdot (A \cdot C) = B \cdot I_n \Longleftrightarrow \underbrace{(B \cdot A)}_{I_n} \cdot C = B \Longleftrightarrow C = B.$$

Logo, A^{-1} é única.

MI_2 A e B são invertíveis se, e somente se, existem A^{-1} e B^{-1} tais que $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_n$ e $B\cdot B^{-1} = B^{-1}\cdot B = I_n$

Logo,

$$(A\cdot B)\cdot(B^{-1}\cdot A^{-1}) \;=\; A\cdot\underbrace{(B\cdot B^{-1})}_{I_n}\cdot A^{-1} \;=\; A\cdot A^{-1} \;=\; I_n.$$

Analogamente, $(B^{-1}\cdot A^{-1})\cdot(A\cdot B) = I_n$.

Portanto, $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$.

MI_3 Se A é invertível, então $\det A \neq 0$, como $\det A^T = \det A$, então $\det A^T \neq 0$ e A^T é invertível.

Como,

$$A\cdot A^{-1} = I_n \Longrightarrow \left(A\cdot A^{-1}\right)^T = I_n^T = I_n \overset{T_4}{\Longrightarrow} (A^{-1})^T\cdot A^T = I_n.$$

Analogamente, $A^T\cdot(A^{-1})^T = I_n$.

Portanto, $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

MI_4 Se A é invertível, na demonstração do **Teorema 1.3.7** temos $\det A\cdot\det A^{-1} = 1 \overset{\det A\neq 0}{\Longrightarrow}$ $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \neq 0$, portanto A^{-1} também é invertível e segue da **Definição 1.3.2** que $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

MI_5 Como $\lambda \neq 0$, então $(\lambda\cdot A)\cdot\left(\dfrac{1}{\lambda}\cdot A^{-1}\right) = \lambda\cdot\dfrac{1}{\lambda}\cdot(A\cdot A^{-1}) = I_n$.

Portanto, $\lambda\cdot A$ é invertível e $(\lambda\cdot A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\cdot A^{-1}$.

MI_6 Como $\det D = d_{11}\cdot d_{22}\cdot\,\cdots\,\cdot d_{nn} \overset{d_{ii}\neq 0}{\neq} 0$, logo D é invertível. Além disso:

$$\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d_{nn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d_{nn}} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & d_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $D^{-1} = [e_{ij}]_{n\times n}$ matriz diagonal com $e_{ii} = {}^1\!/_{d_{ii}}$.

MI_7 Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ é invertível, então $\det A \neq 0$, como $\det \overline{A} \overset{D_8}{=} \overline{\det A} \neq 0$, portanto $\overline{A}$ é invertível.

Como,

$$\overline{A\cdot A^{-1}} \;=\; \overline{I_n} \iff \overline{A}\cdot\overline{A^{-1}} \;=\; I_n.$$

Analogamente, $\overline{A^{-1}}\cdot\overline{A} \;=\; I_n$.

Portanto, $\overline{A}^{\,-1} \;=\; \overline{A^{-1}}$.

MI_8 (a) Basta observar que se $A \cdot B = I_n$, então

$$\det(A \cdot B) = \det I_n = 1 \overset{\text{Teo. 1.2.22}}{\Longrightarrow} \det A \cdot \det B = 1 \Longrightarrow \det A \neq 0.$$

Portanto, pelo **Teorema 1.3.7** a matriz A é invertível, com inversa $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A)$.

(b) Verifica-se de maneira análoga ao item anterior.

■

Proposição 1.3.9 (i) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é matriz ortogonal, então A é invertível e $A^{-1} = A^T$.

(ii) Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ é matriz unitária, então A é invertível e $A^{-1} = A^*$.

Demonstração:

(i) Observemos que $A \in M_n(\mathbb{R})$ é matriz ortogonal se, e somente se, $A \cdot A^T = I_n$, consequentemente A é invertível e $A^{-1} = A^T$.

(ii) $A \in M_n(\mathbb{C})$ é unitária se, e somente se, $A \cdot A^* = I_n$ e portanto, A é invertível e $A^{-1} = A^*$.

■

Observação 1.3.10 O **Exemplo 1.3.8 (b)** nos mostra que a obtenção da inversa usando o **Teorema 1.3.7** não é eficiente, pois são necessários muitos cálculos.

Vamos introduzir um outro mecanismo para determinar a inversa de uma matriz quadrada, quando esta existe.

1.4 Matriz na Forma Escalonada e na Forma Escada

Proposição 1.4.1 As matrizes elementares $E^n_{i\leftrightarrow j}$, $E^n_{i\to\kappa i}$ e $E^n_{i\to i+\kappa j}$ são invertíveis, com inversas:

$$\left(E^n_{i\leftrightarrow j}\right)^{-1} = E^n_{i\leftrightarrow j}, \qquad \left(E^n_{i\to\kappa i}\right)^{-1} = E^n_{i\to\frac{1}{\kappa}i} \qquad \text{e} \qquad \left(E^n_{i\to i+\kappa j}\right)^{-1} = E^n_{i\to i-\kappa j},$$

com $\kappa \in \mathbb{K}^*$, também são matrizes elementares.

Demonstração:

No **Corolário 1.2.18** vimos que $\det E^n_{i\leftrightarrow j} = -1$, $\det E^n_{i\to\kappa i} = -\kappa$ e $\det E^n_{i\to i+\kappa j} = 1$, que são todos não bulos, pois $\kappa \neq 0$, logo as matrizes elementares são invertíveis.

Da definição de matrizes elementares, segue ainda que suas inversas são dadas por:

$$\left(E^n_{i\leftrightarrow j}\right)^{-1} = E^n_{i\leftrightarrow j}, \quad \left(E^n_{i\to\kappa i}\right)^{-1} = E^n_{i\to\frac{1}{\kappa}i} \quad \text{e} \quad \left(E^n_{i\to i+\kappa j}\right)^{-1} = E^n_{i\to i-\kappa j},$$

$\kappa \in \mathbb{K}^*$, que também são matrizes elementares. ■

No que segue vamos indicar por E^n_k matriz elementar associada a matriz identidade I_n, independentemente da operação elementar utilizada.

Observação 1.4.2 A **Proposição 1.4.1** nos garante que as operações elementares são reversíveis, ou seja, cada operação elementar pode ser *"desfeita"* por meio de uma operação elementar reversa.

De fato, dadas A em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e E_k^m uma matriz elementar, então $B = E_k^m \cdot A$ é a matriz obtida de A pela operação elementar de E_k^m e

$$(E_k^m)^{-1} \cdot B = (E_k^m)^{-1} \cdot (E_k^m \cdot A) = \underbrace{\left((E_k^m)^{-1} \cdot E_k^m\right)}_{= I_m} \cdot A = I_m \cdot A = A.$$

1.4.1 Matriz Linha Equivalente

Definição 1.4.1 Dada uma matriz A em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, dizemos que B é uma **matriz linha equivalente** a A se, somente se, B é obtida efetuando um número finito de operações elementares sobre as linhas de A.

Notação: $A \sim B$.

Observação 1.4.3 Se B é matriz linha equivalente a $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, então

$$B = E_k^m \cdot \ldots \cdot E_2^m \cdot E_l^m \cdot A.$$

Exemplo 1.4.4 Nos **Exemplos 1.1.52** temos $A \sim B$, $A \sim C$ e $A \sim D$.

Observações 1.4.5 (a) Em alguns momentos diremos simplesmente que A e B são **equivalentes** nos referindo a linha-equivalentes.

(b) Dada A uma matriz quadrada em $M_n(\mathbb{K})$, se A é uma matriz invertível e B é linha equivalente a A, então B também é invertível.

De fato, se $A \in M_n(\mathbb{K})$, $A \sim B$ e $\det A \neq 0$, então

$$\det B = \det\left(E_k^n \cdot \ldots \cdot E_2^n \cdot E_l^n \cdot A\right) \overset{\text{Teo. 1.2.22}}{=} \underbrace{\det E_k^n}_{\neq 0} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\det E_2^n}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\det E_l^n}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\det A}_{\neq 0} \neq 0.$$

Portanto, B é invertível

(c) A relação $\sim$ em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, *"é linha equivalente a"* é uma relação de equivalência, ou seja,

(i) $A \sim A$, para toda $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, pois $A = I_m \cdot A$ e I_m é uma matriz elementar.

Portanto, $\sim$ é reflexiva.

(ii) Dados A e B em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, se $A \sim B$, então

$$B = E_k^m \cdot \ldots \cdot E_2^m \cdot E_1^m \cdot A \Longrightarrow A = (E_1^m)^{-1} \cdot (E_2^m)^{-1} \cdot \ldots \cdot (E_k^m)^{-1} \cdot B,$$

como as matrizes inversas $(E_l^m)^{-1}$ também são elementares segue $B \sim A$.

Logo, $\sim$ é simétrica.

(iii) Dados A, B e C em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, se $A \sim B$ e $B \sim C$, então

$$B = E_{r_k}^m \cdot \ldots \cdot E_{r_1}^m \cdot A \quad \text{e} \quad C = E_{s_l}^m \cdot \ldots \cdot E_{s_1}^m \cdot B \implies C = E_{s_l}^m \cdot \ldots \cdot E_{s_1}^m \cdot E_{r_k}^m \cdot \ldots \cdot E_{r_1}^m \cdot A,$$

portanto $A \sim C$.

Logo, $\sim$ é transitiva.

1.4.2 Matriz na Forma Escalonada

Definição 1.4.2 Uma matriz A em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ está na **forma escalonada** se satisfaz as seguintes condições:

(1) As linhas não-nulas de A estão acima de qualquer linha nula de A, ou seja, as linhas nulas estão agrupadas nas últimas linhas da matriz.
Em outras palavras, se L_i é linha nula e L_k é linha não nula, então com $k < i$.

(2) O primeiro elemento não-nulo de uma linha de A ocorre mais à direita do primeiro elemento não-nulo da linha anterior de A.

Em outras palavras, se $a_{ij} \neq 0$, $i > 1$ e $a_{il} = 0$ para todo $l < j$, então existe algum k, com $k < j$, tal que $a_{(i-1)k} \neq 0$.

Observações 1.4.6 (a) Se A' é uma matriz na forma de escalonada, em cada linha não nula de A' o primeiro elemento não nulo da linha é chamado **pivô da linha**.

(b) Da **Definição 1.4.2** acima segue que, em uma linha nula não há pivô e em cada coluna há no máximo um pivô.

(c) Dada uma matriz A, não nula, na forma escalonada (ou na forma escada), o pivô da 1ª linha ocorre na 1ª coluna ou em alguma coluna subsequente, consequentemente o pivô de cada linha não nula ocorre na coluna correspondente ou em alguma coluna subsequente, ou seja, se a_{ik_i} é o pivô da i-ésima linha, então $k_i \geq i$.

Exemplos 1.4.7 (a) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ está na forma escalonada.

(b) A matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ não está na forma escalonada, pois falha a condição (1).

(c) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ não está na forma escalonada, pois entre as linhas L_3 e L_2 falha a condição (2).

1.4.3 Matriz na Forma Escalonada Reduzida ou na Forma Escada

Definição 1.4.3 Uma matriz A em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ está na **forma escalonada reduzida** ou na **forma escada** se está na forma escalonada e satisfaz as demais condições:

(3) O primeiro elemento não-nulo de cada linha não-nula de A é o número 1.

Em outras palavras, se $a_{ij} \neq 0$ e ($j = 1$ ou $a_{ik} = 0$ para todo k, com $k < j$), então $a_{ij} = 1$.

(4) O primeiro elemento não-nulo de uma linha é o único elemento não-nulo de sua coluna.

Em outras palavras, se $a_{ij} \neq 0$ e ($j = 1$ ou $a_{ik} = 0$ para todo k, com $k < j$), então $a_{lj} = 0$ para todo $l \neq i$.

Exemplos 1.4.8 (a) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ está na forma escada.

(b) A matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ não está na forma escalonada, pois falha a condição (3) na primeira linha.

(c) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ não está na forma escalonada, pois falha a condição (4) na terceira coluna.

Observação 1.4.9 As matrizes nulas e as matrizes identidade estão na forma escalonada reduzida.

Teorema 1.4.10 Toda matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ é equivalente a:

(i) Uma matriz na forma escalonada.

(ii) Uma matriz na forma escalonada reduzida (escada).

Demonstração:

(i) Seja A um matriz em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, se está forma escalonada ou na forma escalonada reduzida, então a podemos tomar a própria matriz A.

Suponhamos que A não está forma escalonada reduzida, nem na forma escalonada, e procedemos da seguinte maneira:

1º Passo: Efetuamos operações elementares do tipo $L_i \longleftrightarrow L_j$, de modo que a matriz resultante A' tenha todas linhas nulas agrupadas nas últimas linhas.

2º Passo: Após o **1º Passo**, se for necessário, consideramos a 1ª coluna de A ou de A' que contém elementos não nulos, dígamos que seja k_1, então $a_{rs} = 0$ para todo $s < k_1$ e todo $r \in \{1, \cdots, m\}$. Efetuamos uma operação elementar do tipo

$$L_1 \longleftrightarrow L_j,$$

de modo que a matriz resultante A_1 tenha $a^1_{1k_1} \neq 0$, ou seja, o elemento da 1ª linha da coluna k_1 é não nulo.

3º Passo: Verificamos se há linhas L_i, com $i > 1$, não nulas, se não existem tais linhas, então A_1 é uma forma escalonada de A.

Caso contrário, para cada i-ésima linha não nula de A_1 com $a^1_{ik_1} \neq 0$ efetuamos a operação elementar

$$L_i \longrightarrow L_i - \frac{a^1_{ik_1}}{a^1_{1k_1}} L_1,$$

obtendo uma matriz A_2 tal que o único elemento não nulo da k_1-ésima coluna é o da 1ª linha.

4º Passo: Verificamos se há alguma coluna k_2, com $k_2 > k_1$, com elemento não nulos. Se não há uma tal coluna, então A_2 é uma forma escalonada de A.

Caso contrário, repetimos os procedimentos do **2º Passo**, e se necessário o **3º Passo**, até alcançar as linhas nulas de A', obtendo uma matriz B, na forma escalonada, equivalente à matriz A.

(ii) Após obter uma B matriz equivalente a A na forma escalonada procedemos da seguinte maneira:

5º Passo: Dígamos que as linhas não nulas de B são $L_1, \cdots, L_p$, e que o primeiro elemento não nulo de cada linha é b_{ik_i}, para $1 \leq i \leq p$.

Nas linhas L_i, com pivô b_{ik_i}, tal que $b_{ik_i} \neq 1$, efetuamos a operação elementar:

$$L_i \longrightarrow \frac{1}{b_{ik_i}} L_i,$$

obtendo uma matriz equivalente C, na forma escalonada e com todos os pivôs $c_{ik_i} = 1$, para $1 \leq i \leq p$.

6º Passo: Na matriz C ou B, com todos os pivôs iguais a 1, efetuamos as operações elementares

$$L_l \longrightarrow L_l - c_{lk_i} L_i, \quad \text{para todo} \quad l \in \{1, \cdots, p\}, \quad \text{com} \quad l \neq i.$$

Fazemos primeiro $i = 2$, obtemos uma matriz em que as colunas k_1 e k_2 são tais que o único elemento não nulo é o pivô, que é igual a 1; em seguida fazemos para $i = 3$ obtemos uma matriz em que as colunas k_1, k_2, k_3 são tais que o único elemento não nulo é o pivô, igual a 1; repetindo sucessivamente até p-ésima coluna obtemos uma matriz em que as colunas $k_1, k_2, \cdots, k_p$ são tais que o único elemento não nulo é o pivô, igual a 1.

Como nesta matriz as linhas L_t, com $t > p$ são linhas nulas, então esta está na forma escalonada reduzida.

■

Exemplo 1.4.11 Determine uma matriz equivalente à matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 1 \\ 4 & 14 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ na forma escalonada e uma na forma escalonada reduzida

Solução:

Neste caso, para facilitar as contas podemos iniciar permutando a 1ª linha com a 2ª ou a 3ª, em que o primeiro número é o 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 1 \\ 4 & 14 & -2 & 6 \end{bmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 8 & 7 \\ 1 & 4 & -5 & 1 \\ 4 & 14 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - 4L_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 0 & 2 & -18 & -2 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -18 & -2 \end{bmatrix} L_4 \to L_4 - 2L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz na forma escalonada equivalente à matriz A.

Agora efetuando:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_3 \to \frac{1}{3} L_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_1 \to L_1 - 3L_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 31 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 - 5L_3 \\ L_2 \to L_2 + L_3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 31 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 31 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz na forma escalonada reduzida equivalente à matriz A.

Observações 1.4.12 (a) O **Teorema 1.4.10** acima nos diz que podemos transformar qualquer matriz, efetuando um número finito de operações elementares, em uma matriz na forma escalonada ou na forma escada.

(b) Dada uma matriz A, se B é uma matriz tal que $A \sim B$ e B está na forma escalonada (ou na forma escada), dizemos que B é uma **forma reduzida escalonada (forma escada)** de A, ou que é uma **reduzida à forma escalonada (forma escada)** de A.

(c) Nos procedimentos apresentados na demonstração do **Teorema 1.4.10** as possibilidades de escolhas não são únicas, daí que há diversas formas escalonadas de uma mesma matriz não nula. Já a forma escada de uma matriz é única, aqui mostraremos a unicidade apenas para o caso em A é matriz quadrada de ordem n invertível, veremos que nest caso a forma escada de A é a matriz I_n, a identidade de ordem n.

1.4.4 Matriz Inversa obtida através de Operações Elementares

Vimos que se A é uma matriz em $M_n(\mathbb{K})$ invertível, então ao efetuarmos operações elementares em A a matriz obtida também é invertível, vamos mostrar que neste caso a forma escada de A é a matriz identidade de ordem n.

Lema 1.4.13 Seja A uma matriz quadrada em $M_n(\mathbb{K})$, se B uma forma reduzida de A na forma escada é tal que existe um b_{ik_i} pivô da i-ésima linha, com e $k_i > i$, então pelo menos a n-ésima de B é linha nula

Demonstração: Seja $i \in \{1, \cdots, n\}$ tal que b_{ik_i} pivô da i-ésima linha da matriz B, com $k_i > i \geq i+1$.

Logo, se a $(i+1)$-ésima linha é não nula, então o pivô $b_{(i+1)k_{i+1}}$ é tal que $k_{i+1} > i+1 \geq i+2$.

E assim sucessivamente, para todo $l > i$ se existe pivô b_{lk_l}, este estará na k_l-ésima coluna, com $k_l > l$.

Como B é uma matriz quadrada de ordem n, então a n-ésima linha é nula, pois a última coluna é n-ésima, portanto esta linha não tem pivô. ■

Teorema 1.4.14 Uma matriz A em $M_n(\mathbb{K})$ é invertível se, e somente se, $A \sim I_n$, ou seja, A é uma matriz invertível se, e somente se, a forma escalonada reduzida de A é a matriz identidade I_n.

Além disso, efetuando na identidade I_n a mesma sequência de operações elementares que transformou A em I_n obtém-se a inversa de A.

Demonstração: É claro que se I_n é a forma escalonada reduzida de A, então A é linha equivalente à I_n, como esta é uma matriz invertível, segue pela **Observação 1.4.3 (b)** que A é invertível.

Suponhamos que A é invertível e seja B uma forma escalonada reduzida de A, pelo mesmo argumento acima segue que B é invertível.

O pivô de cada linha de B ocorre na coluna correspondente.

De fato, vimos na **Observação 1.4.6 (c)** que o pivô de uma linha ocorre na coluna correspondente , ou em alguma coluna subsequente, ou seja, se b_{ik_i} é pivô da i-ésima linha, então $k_i \geq i$.

Mas se para algum i tivermos $k_i > i$ pelo **Lema 1.4.13** teríamos em B pelo menos a n-ésima linha uma linha nula, uma contradição pois B é invertível.

Logo, como B não tem linhas nulas e é uma matriz quadrada de ordem n, segue que $b_{11},\ b_{22},\ \cdots,\ b_{nn}$ são os pivôs de B.

Além disso, como B está na forma escalonada reduzida segue que todos os pivôs são iguais a 1 e que em cada coluna com pivô, este é o único elemento não nulo da coluna.

Portanto, B é a matriz identidade de ordem n. ■

Observação 1.4.15 Segue da demonstração do Teorema 1.4.14, que $A \in M_n(\mathbb{K})$ é invertível, então sua forma escalonada reduzida é única, a matriz identidade de ordem n.

Corolário 1.4.16 Seja A em $M_n(\mathbb{K})$ uma matriz quadrada, se A é invertível, então efetuando na identidade I_n a mesma sequência de operações elementares que transformou A em I_n, a matriz identidade será transformada em A^{-1}, a inversa de A.

Demonstração: Como A é invertível, então sua forma escalonada reduzida é a identidade I_n, logo existem operações elementares $E_1,\ E_2,\ \cdots,\ E_k$ tais que:

$$E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n.$$

Multiplicando à igualdade acima, pela direita, por A^{-1}, a inversa de A, obtemos:

$$E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{=I_n} = \underbrace{I_n \cdot A^{-1}}_{=A^{-1}} \Longleftrightarrow E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot I_n = A^{-1},$$

ou seja, efetuando as operações elementares $E_1,\ E_2,\ \cdots,\ E_k$ na matriz identidade obtemos A^{-1}, a inversa de A. ■

Exemplos 1.4.17 Obtenha, em cada um dos casos abaixo, a inversa da matriz A utilizando operações elementares sobre as linhas.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução:

(a)

$$\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad L_1 \longleftrightarrow L_2$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 & -4 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 + 2L_2 \\ \\ L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 4 & -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \longrightarrow -L_2 \\ L_3 \longrightarrow -L_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 4 & -1 \end{array} \quad L_2 \longrightarrow L_2 - L_3 \quad .$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix},$$

este resultado coincide com o que obtivemos calculando o determinante pela adjunta.

(b)

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \longrightarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -7 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad L_4 \longrightarrow -\frac{1}{2} L_4$$

$$\sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -7 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \quad L_2 \longleftrightarrow L_4$$

$$\sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -5 & -7 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \longrightarrow L_4 - 3L_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{array} \quad L_4 \longrightarrow L_4 - \frac{4}{5} L_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{4}{5} & \frac{7}{10} \end{array}\right] \quad L_4 \longrightarrow \tfrac{5}{3}L_4$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{4}{3} & \frac{7}{6} \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 - 3L_4 \\ \\ L_3 \longrightarrow L_3 + 7L_4 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 4 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -5 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{2} & -\frac{25}{3} & \frac{55}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{4}{3} & \frac{7}{6} \end{array}\right] \quad L_3 \longrightarrow -\tfrac{1}{5}L_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{3} & -\frac{11}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{4}{3} & \frac{7}{6} \end{array}\right] \quad L_1 \longrightarrow L_1 - 2L_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{3} & -\frac{11}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{4}{3} & \frac{7}{6} \end{array}\right].$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{3} & -\frac{11}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{4}{3} & \frac{7}{6} \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -10 & 11 \\ -4 & -3 & 8 & -7 \end{bmatrix},$$

este resultado coincide com o que obtivemos calculando o determinante pela adjunta.

Demonstração do Teorema 1.2.22:

Demonstração: Sejam A e B matrizes em $M_n(\mathbb{K})$:

1º Caso: A ou B não é invertível, pela **Propriedade** MI_2 $A \cdot B$ também não é invertível.

Logo, pelo **Teorema 1.3.7** segue que $\det A = 0$ ou $\det B = 0$ e que $\det (A \cdot B) = 0$, portanto $\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

2º Caso: A e B são matrizes invertíveis.

Como A é invertível, então sua forma escalonada reduzida é a identidade I_n, e existem operações elementares $E_1, E_2, \cdots, E_k$ tais que: $E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$.

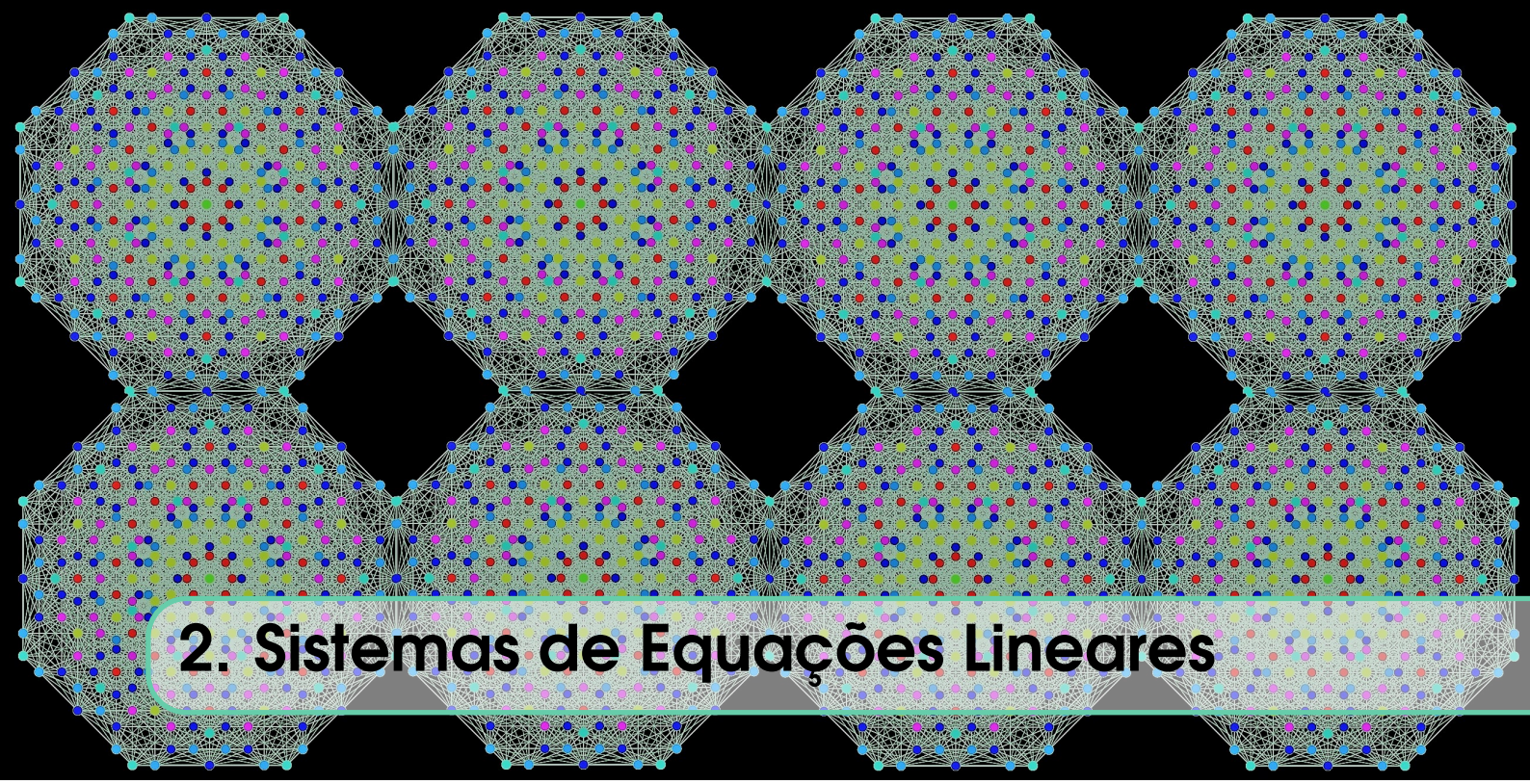
Consequentemente,

$$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1} \implies A \cdot B = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1} \cdot B.$$

Como as matrizes $E_1^{-1}, E_2^{-1}, \cdots, E_k^{-1}$ também são matrizes elementares, utilizando o **Corolário 1.2.18** sucessivas vezes obtemos:

$$\begin{aligned} \det (A \cdot B) &= \det (E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1} \cdot B) = \det E_1^{-1} \cdot \det E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot \det E_k^{-1} \cdot \det B \\ &= \det (\underbrace{E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1}}_{=A}) \cdot \det B = \det A \cdot \det B \end{aligned}.$$

■



2. Sistemas de Equações Lineares

2.1 Sistemas de Equações Lineares

Definição 2.1.1 Um **sistema de equações lineares** real ou complexo é um sistema em que todas as equações são lineares reais ou complexas, ou seja, é um sistema do tipo:

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

nas **variáveis** $x_1, x_2, \cdots, x_n$, com **coeficientes** $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}$, $a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}$ e $b_1, b_2, \cdots, b_m$ **termos independentes** números reais ou números complexos.

Matricialmente temos:

$$S: \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B},$$

com $\begin{cases} A \text{ a matriz dos coeficientes de } S \\ X \text{ a matriz das variáveis de } S \\ B \text{ a matriz dos termos independentes de } S \end{cases}$.

Matriz Ampliada de um Sistema Linear

Definição 2.1.2 A matriz obtida da matriz A incluindo à direita uma coluna, esta constituída pelos termos independentes de S, é chamada **matriz ampliada** do sistema S e aqui indicada por M. Logo,

$$M = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

2.1.1 Solução de um Sistema Linear

Definição 2.1.3 Uma **solução de um sistema de equações lineares**, real ou complexo, em n variáveis,

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{2.1.1}$$

é uma n-upla $(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que ao substituirmos λ_1 por x_1, λ_2 por x_2, $\cdots$, λ_n po x_n, todas as equações de S se verificam, ou seja,

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} a_{11}\lambda_1 & + & \lambda_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\lambda_n & = & b_1 \ \checkmark \\ a_{21}\lambda_1 & + & \lambda_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\lambda_n & = & b_2 \ \checkmark \\ & & & & & & \vdots & & \\ a_{m1}\lambda_1 & + & \lambda_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\lambda_n & = & b_m \ \checkmark \end{array}.$$

A solução pode ser dada na forma $\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_2 \\ \quad\vdots \\ x_n = \lambda_n \end{cases}$ ou na forma $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

O **conjunto solução** de S, indicado por $Sol(S)$, é o conjunto de todas n-uplas $(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n)$ soluções de S, ou seja,

$$Sol(S) = \{\lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n) \in \mathbb{K}^n;\ \lambda \text{ é solução de } S\} \subset \mathbb{K}^n.$$

Exemplos 2.1.1 (a) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$ é uma solução do sistema $S: \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$, pois

$$\begin{array}{rcrcl} 3+4\times(-2)+3\times 2 & = & 3-8+6 & = & 1 \\ 2\times 3+5\times(-2)+4\times 2 & = & 6-10+8 & = & 4 \\ 3-3\times(-2)-2\times 2 & = & 3+6-4 & = & 5 \end{array}.$$

Veremos que esta é única solução de S, portanto $Sol(S) = \{(3,\ -2,\ 2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(b)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 7y & - & 8z & = & 0 \\ -3x & + & 8y & - & 5z & = & 0 \\ & - & y & + & 13z & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow y = 13z \end{array} \qquad \longleftarrow \quad 3x = 8(13z) - 5z = 99z \Rightarrow x = 33z \ .$$

Logo, $Sol(S) = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3;\, x = 33z,\, y = 13z\}$.

Proposição 2.1.2 Se um sistema linear S como 2.1.1 em $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ tem mais do que uma solução, então S tem infinitas soluções.

Demonstração: Sejam $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ e $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ soluções distintas do sistema linear 2.1.1, mostremos que $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$, com $\eta_i = \alpha\lambda_i + (1-\alpha)\mu_i$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e $\alpha \neq 1$, também é solução de 2.1.1.

De fato, como $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ e $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ são soluções do sistema, então:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1n}\lambda_n &=& b_1 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2n}\lambda_n &=& b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \cdots + a_{mn}\lambda_n &=& b_m \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\mu_1 + a_{12}\mu_2 + \cdots + a_{1n}\mu_n &=& b_1 \\ a_{21}\mu_1 + a_{22}\mu_2 + \cdots + a_{2n}\mu_n &=& b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}\mu_1 + a_{m2}\mu_2 + \cdots + a_{mn}\mu_n &=& b_m \end{array}\right.$$

Logo,

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \cdots + a_{1n}\eta_n \\ a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + \cdots + a_{2n}\eta_n \\ \vdots \\ a_{m1}\eta_1 + a_{m2}\eta_2 + \cdots + a_{mn}\eta_n \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{l} a_{11}(\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\mu_1) + a_{12}(\alpha\lambda_2 + (1-\alpha)\mu_2) + \cdots + a_{1n}(\alpha\lambda_n + (1-\alpha)\mu_n) \\ a_{21}(\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\mu_1) + a_{22}(\alpha\lambda_2 + (1-\alpha)\mu_2) + \cdots + a_{2n}(\alpha\lambda_n + (1-\alpha)\mu_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\mu_1) + a_{m2}(\alpha\lambda_2 + (1-\alpha)\mu_2) + \cdots + a_{mn}(\alpha\lambda_n + (1-\alpha)\mu_n) \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \alpha(a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1n}\lambda_n) + (1-\alpha)(a_{11}\mu_1 + a_{12}\mu_2 + \cdots + a_{1n}\mu_n) \\ \alpha(a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2n}\lambda_n) + (1-\alpha)(a_{21}\mu_1 + a_{22}\mu_2 + \cdots + a_{2n}\mu_n) \\ \vdots \\ \alpha(a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \cdots + a_{mn}\lambda_n) + (1-\alpha)(a_{m1}\mu_1 + a_{m2}\mu_2 + \cdots + a_{mn}\mu_n) \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \alpha b_1 + (1-\alpha)b_1 \\ \alpha b_2 + (1-\alpha)b_2 \\ \vdots \\ \alpha b_m + (1-\alpha)b_m \end{array}\right. \overset{\alpha \neq 1}{=} \left\{\begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array}\right. .$$

Portanto, $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ também é solução de 2.1.1, como podemos tomar todo $\alpha \in \mathbb{K}$, com $\alpha \neq 1$, segue que existem infinitas n-uplas $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$, consequentemente o sistema linear 2.1.1 tem infinitas soluções. ■

2.1.2 Classificação de Sistemas de Equações Lineares

Classificamos um sistema de equações lineares quanto às soluções da seguinte maneira:

Sistemas Lineares Compatíveis

Definição 2.1.4 Dizemos que um sistema linear é **compatível** quando admite alguma solução, dentre os sistemas lineares compatíveis temos:

(i) Os sistemas lineares **possíveis determinados**, que são aqueles que admitem uma única solução.

(ii) Os sistemas lineares **possíveis indeterminados**, que são aqueles que admitem infinitas soluções.

Exemplos 2.1.3 (a) $S: \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$, é um sistema linear compatível determinado, pois tem uma única solução: $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$.

(b) $S: \begin{cases} x + 2y + z + w = 0 \\ x + 3y - z + 2w = 0 \end{cases}$, é um sistema linear compatível indeterminado, pois tem infinitas soluções dadas por $\begin{cases} x = -5z + w \\ y = 2z - w \end{cases}$, com z e w variando nos números reais, por exemplo $\begin{cases} x = -6 \\ y = 3 \\ z = 1 \\ w = -1 \end{cases}$ é uma solução do sistema.

Sistemas Lineares Incompatíveis

Definição 2.1.5 Dizemos que um sistema linear é **incompatível** quando não admite solução.

Exemplo 2.1.4 O sistema linear é incompatível $S: \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x + y = 6 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$, pois não admite solução, já que das três equações obtemos que $-8 = y = \frac{18}{7}$, um absurdo!

2.1.3 Sistema Linear Homogêneo

Definição 2.1.6 Dizemos que um sistema linear é um **sistema homogêneo** quando todos os termos independentes são iguais a zero.

Exemplo 2.1.5 O sistema $S: \begin{cases} 2x + 3y - 9z = 0 \\ 5x - 8y + 7z = 0 \end{cases}$ é homogêneo.

Observação 2.1.6 Todo sistema linear homogêneo admite pelo menos uma solução, que é aquela em que todas as variáveis são iguais a zero, esta solução é chamada **solução trivial**.

Portanto, um sistema homogêneo é um sistema compatível determinado ou um sistema compatível indeterminado.

No exemplo acima a solução trivial é $x = y = z = 0$.

2.1.4 Sistemas Equivalentes

Definição 2.1.7 Dois sistemas lineares S e S' são **equivalentes** se, e somente se, toda solução de S é solução de S' são sistemas nas mesmas variáveis e toda solução de S' é solução de S, ou seja, se e somente se, $Sol(S) = Sol(S')$.

Exemplos 2.1.7 (a) $S: \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$ e $S': \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ -3y - 2z = 2 \\ 7y + 5z = -4 \end{cases}$

são equivalentes, pois a única solução de S e de S' é $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$.

(b) $S: \begin{cases} x + 2y + z + w = 0 \\ x + 3y - z + 2w = 0 \end{cases}$ e $S': \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + y + z - 2w = 0 \\ x - y + 3z + w = 0 \end{cases}$ não são equivalentes, pois $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ é solução de S e de S', no entanto $\begin{cases} x = -6 \\ y = 3 \\ z = 1 \\ w = -1 \end{cases}$ é solução de S, mas não é solução de S'.

2.1.5 Operações Elementares sobre as Equações de um Sistema Linear

As operações elementares que vimos para matrizes também serão utilizadas em sistemas lineares, neste caso são:

OE_1 Permutação de duas equações, ou seja, permutamos uma i-ésima equação e uma j-ésima equação.

Notação: $E_i \longleftrightarrow E_j$.

OE_2 Substituição de uma equação por ela previamente multiplicada por um número (real ou complexo) não nulo, ou seja, substituímos uma i-ésima equação por ela multiplicada por número não nulo κ.

Notação: $E_i \longrightarrow \kappa E_i$.

OE_3 Substituição de uma equação por ela somada com outra equação previamente multiplicada por um número (real ou complexo) não nulo, ou seja, substituímos uma i-ésima equação por ela somada com uma j-ésima equação multiplicada por número não nulo κ.

Notação: $E_i \longrightarrow E_i + \kappa E_j$,
com E_i a i-ésima equação do sistema linear.

Exemplos 2.1.8 Seja $S:\begin{cases} -x+3y+4z=1 \\ 2x+y+3z=-2 \\ 5x+3z=-7 \end{cases}$, determine o sistema linear:

(a) S' obtido de S pela operação elementar $E_2 \longleftrightarrow E_3$.

(b) S'' obtida de S pela operação elementar $E_1 \longrightarrow (-2)E_1$.

(c) S''' obtida de S pela operação elementar $E_2 \longrightarrow E_2+2E_1$.

Solução:

(a) $S':\begin{cases} -x+3y+4z=1 \\ 5x+3z=-7 \\ 2x+y+3z=-2 \end{cases} E_2 \longleftrightarrow E_3$.

(b) $S'':\begin{cases} 2x-6y-8z=-2 \\ 2x+y+3z=-2 \\ 5x+3z=-7 \end{cases} E_1 \longrightarrow (-2)E_1$.

(c) $S'':\begin{cases} -x+3y+4z=1 \\ 7y+11z=0 \\ 5x+3z=-7 \end{cases} E_2 \longrightarrow E_2+2E_1$

Teorema 2.1.9 Seja $S: A_{m\times n}\cdot X_{n\times 1} = B_{m\times 1}$ um sistema linear real ou complexo, se $S': A'_{m\times n}\cdot X_{n\times 1} = B'_{m\times 1}$ é um sistema linear obtido efetuando um número finito de operações elementares nas equações de S, então S e S' são equivalentes.

Demonstração: Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ é uma solução de S, então para toda equação $E_i:\ a_{i1}\cdot x_1 + a_{i2}\cdot x_2 + \cdots + a_{in}\cdot x_n = b_i$, de S, as igualdades

$$a_{i1}\cdot\alpha_1 + a_{i2}\cdot\alpha_2 + \cdots + a_{in}\cdot\alpha_n = b_i, \quad \text{com} \quad i\in\{1,\cdots,m\},$$

são verificadas.

Logo,

- $$\begin{aligned} & (\kappa\cdot a_{i1})\cdot\alpha_1 + (\kappa\cdot a_{i2})\cdot\alpha_2 + \cdots + (\kappa\cdot a_{in})\cdot\alpha_n \\ = \ & \kappa\cdot(a_{i1}\cdot\alpha_1) + \kappa\cdot(a_{i2}\cdot\alpha_2) + \cdots + \kappa\cdot(a_{in}\cdot\alpha_n) \\ = \ & \kappa\cdot(a_{i1}\cdot\alpha_1 + a_{i2}\cdot\alpha_2 + \cdots + a_{in}\cdot\alpha_n) \\ = \ & \kappa\cdot b_i. \end{aligned}$$
  Portanto, se α é solução de uma equação E_i do sistema linear S, então α é solução de toda equação do tipo $\kappa\cdot E_i$, com $\kappa\in\mathbb{K}^*$.

- $$\begin{aligned} & (a_{i1}+\kappa\cdot a_{j1})\cdot\alpha_1 + (a_{i2}+\kappa\cdot a_{j2})\cdot\alpha_2 + \cdots + (a_{i2}+\kappa\cdot a_{jn})\cdot\alpha_n \\ = \ & \left(a_{i1}\cdot\alpha_1 + a_{i2}\cdot\alpha_2 + \cdots + a_{in}\cdot\alpha_n\right) + \left(\kappa\cdot(a_{j1}\cdot\alpha_1) + \kappa\cdot(a_{j2}\cdot\alpha_2) + \cdots + \kappa\cdot(a_{jn}\cdot\alpha_n)\right) \\ = \ & b_i + \kappa\cdot b_j. \end{aligned}$$
  Portanto, se α é solução das equações E_i e E_j do sistema linear S, então α é solução de toda equação do tipo $E_i+\kappa\cdot E_j$, com $\kappa\in\mathbb{K}$.

Consequentemente, $Sol(S) = Sol(S')$. ■

2.2 Resolução de Sistemas Lineares

2.2.1 Posto e Nulidade de uma Matriz

Definição 2.2.1 Sejam A uma matriz em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e B a sua matriz equivalente na forma escada.

(i) O **posto** de A, denotado por $p(A)$, é o número de linhas não nulas de B.

(ii) A **nulidade** de A, denotada por $\text{null}(A)$, é a diferença entre n, o número de colunas de A, e o posto de A, ou seja, $\text{null}(A) = n - p(A)$.

Proposição 2.2.1 Se A é uma matriz de ordem $m \times n$, então $p(A) \leq \min\{m,\ n\}$.

Demonstração:
De fato, se $m \leq n$, então $\min\{m,\ n\} = m$, como $p(A) \leq m$ segue o resultado.

Por outro lado, se $m > n$, como A tem n colunas, então A tem no máximo n pivôs, logo ao escalonar A teremos no máximo n linhas não nulas, portanto $p(A) \leq n = \min\{m,\ n\}$. ■

Observações 2.2.2 (a) Para determinar o posto de uma matriz basta encontrar a sua forma escalonada, pois o número de linhas nulas da forma escalonada é igual ao número de linhas nulas da forma escada.

(b) Note que $\text{null}(A) \geq 0$.

De fato, pois $p(A) \leq \min\{m,\ n\} \leq n \Longrightarrow -p(A) \geq -n$, consequentemente, $\text{null}(A) = n - p(A) \geq 0$.

(c) Dado $S:\ A \cdot X = B$ um sistema de equações lineares com m equações e n variáveis, em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{C}$, sendo $p(A)$ o posto de A matriz dos coeficientes de S e $p(M)$ o posto de M matriz ampliada de S, então $p(A) \leq p(M)$.

De fato, pois a forma escada de A é igual à forma escada de M retirando a última coluna.

Proposição 2.2.3 Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ é invertível se, e somente se, $p(A) = n$ é máximo.

Demonstração: Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$, então

$$A \text{ é invertível } \overset{Teo.1.4.14}{\Longleftrightarrow} A \text{ é linha equivalente a } I_n \Longleftrightarrow p(A) = n.$$

■

Exemplos 2.2.4 Em cada caso determine o posto da matriz A e da matriz A_M:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ e $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right]$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $M = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right]$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ e $M = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -4 & 0 \end{array}\right]$.

Solução:

(a) Com cálculo simples constatamos que $\det A = 1 \neq 0$, portanto a forma escada de A é $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Como $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 1 \end{array}\right] L_3 \longrightarrow 7L_2 - 3L_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \longrightarrow L_2 + 2L_2 \\ L_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -32 \\ 0 & -3 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right] L_2 \longrightarrow -\tfrac{1}{3}L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -32 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right] L_1 \longrightarrow L_1 - 4L_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right].$$

segue que a forma escada de A_M é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right]$.

Logo, $p(A) = p(M) = 3$.

(b) Como $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right] L_2 \longrightarrow L_2 - L_1$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right] L_1 \longrightarrow L_1 - 2L_2 \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right],$$

segue que a forma escada de A é $\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$ e a forma escada de A_M é $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right]$.

Logo, $p(A) = p(M) = 2$.

(c) Como $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -4 & 0 \end{array}\right] L_1 \longleftrightarrow L_2 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & -7 & -18 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 - L_2 \\ \\ L_3 \longrightarrow L_3 + 7L_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -74 \end{array}\right],$$

segue que a forma escada de A é $\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$ e a forma escada de A_M é $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -74 \end{array}\right]$.

Logo, $p(A) = 2$ e $p(M) = 3$.

2.2.2 Teorema do Posto

Teorema 2.2.5 (**Teorema do Posto**)
Seja $S:\ A\cdot X = B$ um sistema de equações lineares com m equações e n variáveis, em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{C}$, $p(A)$ o posto de A matriz dos coeficientes de S e $p(M)$ o posto de M matriz ampliada de S, então:

(i) S admite solução se, e somente se, $p(A) = p(M)$.

(ii) $p(A) = p(M) = n$ se, e somente se, S tem uma única solução.

(iii) $p(A) = p(M) = k < n$ se, e somente se, S tem infinitas soluções. Além disso, o conjunto solução de S tem $n-k$ variáveis livres.

Demonstração: Sejam $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $M = [a_{ij} \mid b_i] \in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{K})$, a matriz dos coeficientes e a matriz ampliada de S, respectivamente, então $p(A) \leq p(M)$ e:

(i) $p(A) < p(M)$ se, e somente se, a última linha não nula da forma escalonada reduzida da matriz ampliada é da forma $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & b'_k \end{array}\right]$ com $b'_k \neq 0$, com $k \leq m$, ou seja, $S \sim S'$ e $S':\ A'\cdot X = B'$, com A' matriz escalonada de A tendo a k-ésima de linha nula e b'_k uma constante não nula é a k-ésima de linha de B', levando à equação $0 = b'_k$, uma contradição!, portanto S não tem solução.

Logo, S tem solução se, e somente se, $p(A) = p(M)$.

(ii) $p(A) = p(M) = n$ se, e somente se, $S \sim S'$, com $S':\ A'\cdot X = B'$ sistema de equações lineares com matriz dos coeficientes e a matriz ampliada associadas, ambas, na forma escalonada:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b'_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Logo, a representação matricial de S' é:

$$S': \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

cuja solução é $x_n = b'_n,\ x_{n-1} = b'_{n-1} - c_{n-1\ n}\cdot x_n$, fazendo as sucessivas substituições obtemos a única solução de S' e de S.

(iii) $p(A) = p(M) = k < n$ se, e somente se, $S \sim S'$, com $S':\ A'\cdot X = B'$ sistema de equações lineares com matriz dos coeficientes e a matriz ampliada associadas, ambas, na forma escalonada:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2k} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & c_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M' = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2k} & \cdots & c_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & c_{kn} & b'_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, a representação matricial de S' é:

$$S' : \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2k} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & c_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, $x_k = b'_k - c_{k\,k+1} \cdot x_{k+1} - \cdots - c_{k\,n} \cdot x_n$, e portanto, as variáveis $x_{k+1}, \cdots, x_n$ variam em $\mathbb{R}$. Fazendo as sucessivas substituições encontramos as expressões de $x_1, \cdots, x_{k-1}$ que determinam as infinitas soluções de S' e S.

■

Observação 2.2.6 O número $n-k$ =null(A) do item (iii) do **Teorema do Posto (2.2.5)** é chamado **grau de liberdade** do sistema linear S.

Exemplos 2.2.7 Classifique os sistemas lineares abaixo em possível determinado, possível indeterminado e impossível utilizando o **Teorema do Posto**.

(a) $\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x + 3y - z + 2t = -4 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y + z - t = 4 \\ x + y - z + t = -4 \\ x - y + z + t = 2 \end{cases}$;

(d) $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x - y - 3z = -3 \\ 3x + 3y - 5z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$.

Solução:

(a) Do exemplo 2.2.4 (a) temos $p(A) = p(M) = 3 =$ número de variáveis do sistema, portanto o sistema tem uma única solução, ou seja, é compatível determinado.

(b) Do exemplo 2.2.4 (b) temos $p(A) = p(M) = 2 <$ número de variáveis do sistema, portanto o sistema tem infinitas soluções, ou seja, é compatível indeterminado.

(c) Fazendo alguns cálculos concluímos que a forma escada de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz identidade I_4 e $M = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$ tem forma escada $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$.

Logo, $p(A) = p(M) = 4 =$ número de variáveis do sistema, portanto o sistema tem uma única solução, ou seja, é compatível determinado.

(d) A matriz $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$ tem forma escalonada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4/3 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$.

Portanto, $p(A) = 3 \neq p(M) = 4$, consequentemente o sistema não tem solução, ou seja, é incompatível.

2.3 Métodos de Resolução de Sistemas Lineares

Dado um sistema de equações lineares

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Lembremos que a matriz dos coeficientes de S e matriz ampliada de S são dadas, respectivamente, por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Vamos analisar a A e M e aplicar o **Teorema do Posto** (2.1.9), para determinar o conjunto solução de S aplicamos as operações elementares de linhas, utilizando a técnica da eliminação.

2.3.1 Método da Eliminação de Gauss-Jordan

O **método de Gauss-Jordan** consiste em efetuar operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada do sistema, até obter sua forma reduzida na **forma escada**.

A matriz ampliada reduzida à forma escada nos fornecerá a(s) solução(ões) ou alguma incompatibilidade.

A vantagem deste processo é que um sistema cuja matriz ampliada é uma matriz na forma escada tem solução(ões) ou incompatibilidade imediata(s).

Verificando se o Sistema Linear é Compatível ou Incompatível

Corolário 2.3.1 (Do Teorema do Posto)
Um sistema de equações lineares não tem solução se, e somente se, a última linha não nula da forma escalonada reduzida da matriz ampliada é da forma $\left[0 \ \cdots \ 0 \ \middle| \ b'_m\right]$ com $b'_m \neq 0$.

Observação 2.3.2 Para se encontrar a solução de um sistema linear não é necessário transformar a matriz ampliada do sistema na sua forma escalonada reduzida, mas se a matriz está nesta forma, o sistema associado é o mais simples possível.

2.3.2 Método de Eliminação de Gauss ou do Escalonamento

Um outro método de resolução de sistemas de equações lineares, chamado **método de Gauss**, consiste em efetuar operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada do sistema até obter uma **forma escalonada**.

Verificando se o Sistema Linear é Compatível ou Incompatível

O corolário acima também se aplica a este método, ou seja, o sistema de equações lineares não tem solução se, e somente se, a última linha não nula da forma escalonada da matriz ampliada é da forma $\left[0\cdots0\middle|b'_m\right]$ com $b'_m \neq 0$.

No caso em que o sistema tenha solução, para obte-las, após reduzir a matriz ampliada à forma escalonada, devemos fazer as devidas substituições e obter a(s) solução(ões).

A vantagem deste processo é que o número de operações elementares a serem realizadas é bem menor do que o método de Gauss-Jordan.

Exemplos 2.3.3 Resolva os seguintes sistemas lineares:

(a) $S: \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$;

(b) $S: \begin{cases} x + 2y + z + w = -1 \\ x + 3y - z + 2w = 3 \end{cases}$;

(c) $S: \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x + y = 6 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$;

(d) $S: \begin{cases} x + 2y + 2z + 2w = 0 \\ 2x + 4y + 6z + 8w = 0 \\ 3x + 6y + 8z + 10w = 0 \end{cases}$.

Solução:

(a) A matriz ampliada de S é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right]$, escalonando obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right] \ L_2 \longrightarrow -\tfrac{1}{3}L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 - 4L_2 \\ \\ L_3 \longrightarrow L_3 + 7L_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \ L_3 \longrightarrow -3L_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 - \frac{1}{3}L_3 \\ L_2 \longrightarrow L_2 - \frac{2}{3}L_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Logo, a solução do sistema é $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3 \\ y &=& -2 \\ z &=& 2 \end{array}\right.$.

(b) A matriz ampliada de S é $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right]$, escalonando obtemos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] L_2 \longrightarrow L_2 - L_1 \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right] L_1 \longrightarrow L_1 - 2L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Logo, a solução do sistema é

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & +5z & - & w & = & -9 \\ & y & -2z & + & w & = & 4 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -9-5z+w \\ y &=& 4+2z-w \end{array}\right.,$$

com z e w em $\mathbb{R}$.

(c) A matriz ampliada de S é $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -4 & 0 \end{array}\right]$, escalonando obtemos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -4 & 0 \end{array}\right] L_1 \longleftrightarrow L_2 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & -7 & -18 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 - L_2 \\ \\ L_3 \longrightarrow L_3 + 7L_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -74 \end{array}\right].$$

Logo, o sistema não tem solução, pois a última linha da matriz na forma escada nos diz que $0 = -74$ um absurdo!

(d) A matriz ampliada de S é $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 0 \end{array}\right]$, escalonando obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \longrightarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Logo, a solução do sistema linear tem infinitas soluções:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z + 2w + 2t = 0 \\ \qquad\quad z + 2w + 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y-2z-2w-2t \\ z = -2w-2t \end{cases}.$$

Substituindo $z = -2w-2t$ na primeira equação obtemos:

$$\begin{cases} x = -2y+2w+2t \\ z = -2w-2t \end{cases} \text{ com } y,\ w \text{ e } t \text{ em } \mathbb{R}.$$

Observação 2.3.4 Os sistemas lineares dos exemplos (b) e (d) têm infinitas soluções, abaixo temos a forma escalonada (uma reduzida e a outra não) das matrizes ampliadas, indicando acima as variáveis livres e abaixo as variáveis dependentes:

$$\begin{array}{cccc|c} & & z & w & \\ & & \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 0 & 5 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ \uparrow & \uparrow & & & \\ x & y & & & \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccccc|c} & y & & w & t & \\ & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & & \\ x & & z & & & \end{array}$$

De modo geral, no caso em que $p(A) = p(M) < n$, na matriz ampliada escalonada as colunas que têm um pivô de alguma linha correspondem às variáveis dependentes e as outras colunas correspondem às variáveis livres, no exemplo (b) são z e w, já no exemplo (d) são y, w e t.

2.3.3 Método de Resolução da Matriz Inversa

Seja

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

um sistema de equações lineares, tal que:

(i) O número de equações de S é igual ao número de variáveis.

(ii) Matriz A dos coeficientes de S é invertível.

Observação 2.3.5 Como A é invertível e $m = n$, ao escalonar M, a matriz ampliada de S, obtemos uma matriz M', uma forma escalonada de M, tal que então a última linha de M' é da forma $\left[0 \cdots 0\ a'_{nn} \middle| b'_n\right]$ com $a'_{nn} \neq 0$.

Consequentemente, S é compatível determinado.

Para determinar a solução tomamos a forma matricial de S: $A \cdot X = B$, como estamos supondo que A é invertível, então existe A^{-1} e resolvemos o sistema da seguinte maneira:

$$A \cdot X = B \iff A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \iff \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{I_n} \cdot X = A^{-1} \cdot B \iff X = A^{-1} \cdot B.$$

Assim, se $S: A_{n\times n} \cdot X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$, com $\det A \neq 0$, então a solução de S é $X = A^{-1} \cdot B$.

Exemplo 2.3.6 Resolva o sistema $\begin{cases} 2x + y + z = 15 \\ x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + 2z = 10 \end{cases}$ pelo método da matriz inversa.

Solução:

A forma matricial do sistema acima é:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 15 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}}_{B}.$$

Vimos na seção de matriz inversa que a matriz dos coeficientes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ é invertível, e sua inversa é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

Logo, pelo método da matriz inversa a solução do sistema é:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Observações 2.3.7 Um sistema de equações lineares em que o número de equações é igual ao número de variáveis é chamado **sistema linear quadrado**. Dado S um sistema linear quadrado com matriz dos coeficientes A temos:

(a) Se $\det A \neq 0$, então S tem uma única solução.

(b) Se $\det A = 0$, então ou S tem infinitas soluções ou S não tem solução.

(c) Se S é homogêneo e $\det A \neq 0$, então a única solução de S é a solução trivial.

(d) Se S é homogêneo e $\det A = 0$, então S tem infinitas soluções.

(e) Um sistema linear quadrado em que $\det A \neq 0$ é também chamado um **sistema de Cramer**.

2.3.4 Método de Resolução da Regra de Cramer

Na seção 2.3.3 vimos que se $S: A \cdot X = B$ é um sistema de equações lineares em que $A \in M_n(\mathbb{K})$ e $\det A \neq 0$, então S tem uma única solução dada por: $X = A^{-1} \cdot B$.

Mas sabemos do **Teorema 1.3.7** que $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \text{adj}\,(A)$, portanto:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

com Δ_{ij} o cofator de a_{ij}.

Logo,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \cdot \Delta_{11} + b_2 \cdot \Delta_{21} + \cdots + b_n \cdot \Delta_{n1} \\ b_1 \cdot \Delta_{12} + b_2 \cdot \Delta_{22} + \cdots + b_n \cdot \Delta_{n2} \\ \vdots \\ b_1 \cdot \Delta_{1n} + b_2 \cdot \Delta_{2n} + \cdots + b_n \cdot \Delta_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pela definição de determinantes temos:

$$\begin{aligned} b_1 \cdot \Delta_{11} + b_2 \cdot \Delta_{21} + \cdots + b_n \cdot \Delta_{n1} &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ b_1 \cdot \Delta_{12} b_2 \cdot \Delta_{22} + \cdots + b_n \cdot \Delta_{n2} &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \\ &\vdots \\ b_1 \cdot \Delta_{1n} b_2 \cdot \Delta_{2n} + \cdots + b_n \cdot \Delta_{nn} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{nn} & \cdots & b_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Consequentemente, sendo A_i a matriz obtida da matriz A substituindo a i-ésima coluna pela matriz coluna B dos coeficientes independentes do sistema, ou seja,

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \cdots & a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

para $i \in \{1, \cdots, n\}$, então a única solução do sistema linear S é

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad x_i = \frac{D_1}{D}, \quad D_i = \det A_i \quad \text{e} \quad D = \det A, \quad \text{para } i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Este método de resolução de sistemas lineares quadrados com matriz dos coeficientes invertível é chamado **Regra de Cramer**.

Exemplos 2.3.8 Resolva os seguintes sistemas lineares pela regra de Cramer:

(a) $S: \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$;

(b) $S: \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \\ x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$.

Solução:

(a) $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 19$, $D_1 = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 35+3 = 38$ e $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2-21 = -19$.

Logo, $x = \dfrac{38}{19} = 2$ e $y = \dfrac{-19}{19} = -1$, portanto, a única solução de S é $\{(2,-1)\}$.

(b)
$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \longleftrightarrow L_3 \\ \\ \\ \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \longrightarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & 7 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \longrightarrow \frac{1}{11}L_2 \\ \\ \end{matrix} = (-11) \times \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 7L_2 \end{matrix} \\
&= (-11) \times \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-11) \times (-2) = 22,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \longrightarrow L_2 - 8L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 + L_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -19 & 10 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_2 \longleftrightarrow L_3 \end{matrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -19 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \longrightarrow L_3 + 19L_2 \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -66 \end{vmatrix} = -(-66) = 66,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \longleftrightarrow L_3 \\ \\ \\ \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \longrightarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \longrightarrow L_3 - \frac{3}{11}L_2 \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -22,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \longleftrightarrow L_3 \\ \\ \\ \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \longrightarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \longrightarrow L_3 - \frac{7}{11}L_2 \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -(-44) = 44.
\end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{66}{22} = 3$, $y = \dfrac{-22}{22} = -1$ e $z = \dfrac{44}{22} = 2$, portanto, a única solução de S é $\{(3,-1,2)\}$

Exercícios 2.1 Resolva os seguintes sistemas lineares:

(a) $\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 5x - 2y = 4 \\ 3x + y = 9 \\ 4x - y = -7 \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 5x - 2y = 4 \\ 10x - 4y = 3 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} 2x + y + 7z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 5x + 3y + 4z = -5 \end{cases}$;

(d) $\begin{cases} x - 4y + 12z + 9w = 42 \\ 2x - 7y + 26z + 21w = 85 \end{cases}$;

(e) $\begin{cases} 3x - 7y + 8z - 5w + 8t = 9 \\ 3y - 6z + 6w + 4t = -5 \\ 3x - 9y + 12z - 9w + 6t = 15 \end{cases}$;

(f) $\begin{cases} x + 4y + 6z = 11 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \\ 3x + 2y + 2z = 7 \end{cases}$;

(g) $\begin{cases} x + 3y - 3z = 7 \\ 3x + 9y - 4z = 1 \end{cases}$;

(h) $\begin{cases} 3x + 5y - 4z = 0 \\ -3x - 2y + 4z = 0 \\ 6x + y - 8z = 0 \end{cases}$;

(i) $\begin{cases} x - 2y - z + 3w = 0 \\ -2x + 4y + 5z - 5w = 3 \\ x - 2y + 2z + 4w = 5 \end{cases}$;

(j) $\begin{cases} 3x + 6y - 4z - w = 0 \\ -5x + 8z + 3w = 0 \\ 8x - y + 7w = 0 \end{cases}$.

II Espaços Vetoriais

3 Espaços Vetoriais 91

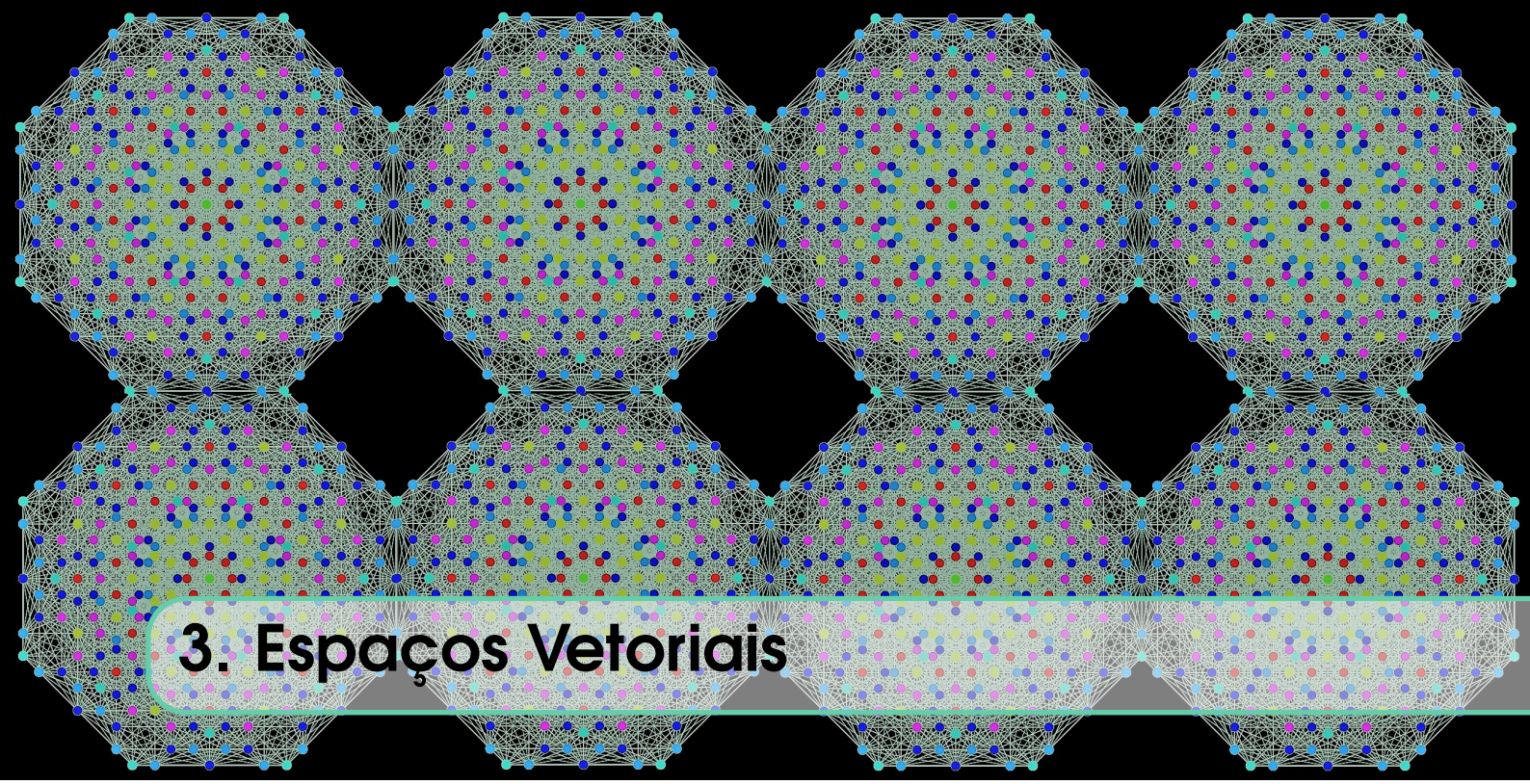
3.1 Espaços Vetoriais
3.2 Subespaços Vetoriais
3.3 Soma, Soma Direta e Intersecção de Subespaços

4 Base e Dimensão de Espaços Vetoriais 111

4.1 Combinação Linear e Subespaço Gerado
4.2 Dependência e Independência Linear
4.3 Base e Dimensão
4.4 Coordenadas de um Vetor
4.5 Matriz Mudança de Base

5 Espaços Vetoriais com Produto Interno 143

5.1 Produto Interno em Espaços Vetoriais Reais
5.2 Produto Interno em Espaços Vetoriais Complexos
5.3 Bases Ortogonais e Bases ortonormais
5.4 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt
5.5 Complemento Ortogonal



3. Espaços Vetoriais

3.1 Espaços Vetoriais

Definição 3.1.1 Um **espaço vetorial** consiste em:

(1) Um conjunto não vazio V de objetos, denominados **vetores**.

(2) Um corpo de números (escalares), denotado por $\mathbb{K}$.

(3) Uma operação de **adição de vetores** de V, que a cada par de elementos $u,\ v \in V$ associa um elemento $u+v \in V$ e satisfaz as seguintes propriedades:

A_1 $u+v = v+u$ para quaisquer u e v em V; **comutativa.**

A_2 $(u+v)+w = u+(v+w)$ para quaisquer u, v e w em V; **associativa.**

A_3 Existe um elemento 0_V em V tal que $u+0_V = u$ para todo u em V; **existência de elemento neutro.**

A_4 Para todo elemento u em V existe o elemento $-u$ também em V tal que $u+(-u) = 0_V$; **existência de elemento simétrico.**

(4) Uma operação de **multiplicação por escalar**, que a cada par de elementos $u \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ associa um elemento $\alpha \cdot u \in V$ e satisfaz as seguintes propriedades:

M_1 $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$ para quaisquer $u \in V$ e α e β em $\mathbb{K}$.

M_2 $\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u \ + \ \alpha \cdot v$ para quaisquer u e v em V e todo e α em $\mathbb{K}$; **distributiva da adição.**

M_3 $(\alpha+\beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ para todo $u \in V$ e quaisquer e α e β em $\mathbb{K}$; **distributiva da multiplicação por escalar.**

M_4 Existe $1_{\mathbb{K}}$ tal que $1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$ para todo $u \in V$; **existência de unidade.**

Observações 3.1.1 (a) Também denotamos o espaço vetorial V por $(V, +, \cdot)$, com $+$ a adição de vetores e $\cdot$ a multiplicação por escalar.

(b) Também denominamos o espaço vetorial V por **espaço vetorial sobre o corpo** $\mathbb{K}$.

(c) No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dizemos que V é um **espaço vetorial real**.

(d) No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dizemos que V é um **espaço vetorial complexo**.

(e) O elemento neutro da adição é único.

De fato, se existissem dois elementos neutros 0_V e $0'_V$ teríamos:

$$0_V = 0_V + 0'_V = 0'_V + 0_V = 0'_V,$$

provando a unicidade.

(f) Para cada $u \in V$ existe um único simétrico em relação à adição.

De fato, se u tivesse dois simétricos $-u$ e $-u'$ teríamos:

$$(-u) = 0_V + (-u) = \big(u + (-u')\big) + (-u) = \big(u + (-u)\big) + (-u') = 0_V + (-u') = -u',$$

provando a unicidade.

3.1.1 Exemplos de Espaços Vetoriais

Alguns conjuntos numéricos que conhecemos têm estrutura de espaços vetoriais tais como:

Exemplos 3.1.2 (a) O conjunto do números reais, $\mathbb{R}$, com as operações usuais de adição e multiplicação de números reais, é um espaço vetorial real.

(b) O conjunto do números complexos, $\mathbb{C}$, com as operações usuais de adição e multiplicação de números complexos, é um espaço vetorial complexo, considerando o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Também podemos considerar o conjunto do números complexos, $\mathbb{C}$, com corpo de escalares $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Neste caso, $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial real.

Espaços Vetoriais Euclidianos

Sabemos que $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.

O produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, indicado por $\mathbb{R}^2$, é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais.

Assim,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y);\ x \text{ e } y \in \mathbb{R}\}.$$

Analogamente, o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, indicado por $\mathbb{R}^3$, é o conjunto de todas as ternas ordenadas (x, y, z) de números reais.

Logo,

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z);\ x,\ y \text{ e } z \in \mathbb{R}\}.$$

De modo geral, o produto cartesiano $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}}$, $\mathbb{R}^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, é o conjunto de todas n-uplas $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de números reais.

Portanto,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n);\ x_1,\ x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Observação 3.1.3 Podemos denotar os elementos de $\mathbb{R}^n$ como matriz linha ou matriz coluna, por exemplo,

$$u = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Igualdade em $\mathbb{R}^n$

Dados $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$ temos:

$$u = v \Longleftrightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ \quad \vdots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

Adição em $\mathbb{R}^n$

Dados $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$, a **adição** de u e v, denotada por $u + v$ é dada por:

$$u + v = (x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n).$$

Propriedades da Adição em $\mathbb{R}^n$

Sejam $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ e $w = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ elementos quaisquer em $\mathbb{R}^n$ e $0_{\mathbb{R}^n} = \underbrace{(0, 0, \cdots, 0)}_{n-\text{upla de zeros}}$, denotemos por $-u = (-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)$, então valem:

A_1 $u + v = v + u$.

A_2 $(u + v) + w = u + (v + w)$.

A_3 $u + 0_{\mathbb{R}^n} = u$.

A_4 $u + (-u) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Multiplicação por Escalar em $\mathbb{R}^n$

Dados $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ a **multiplicação** de u por α, denotada por $\alpha \cdot u$ é dada por:

$$\alpha \cdot u = \alpha \cdot (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \cdots, \alpha \cdot x_n).$$

Propriedades da Multiplicação por Escalar em $\mathbb{R}^n$

Sejam $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ elementos quaisquer em $\mathbb{R}^n$, α e β em $\mathbb{R}$, então valem:

ME_1 $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$.

ME_2 $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$.

ME_3 $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$.

ME_4 $1 \cdot u = u$.

Das propriedades $A_1 - A_4$ e $ME_1 - ME_4$ segue que $\mathbb{R}^n$, com a adição e multiplicação por escalar definidas acima, é um espaço vetorial real, chamado **espaço vetorial euclidiano**.

Observação 3.1.4 De maneira análoga definimos em $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \cdots, z_n);\ z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}\}$, conjunto de todas as n-uplas complexas, a adição e a multiplicação por escalar.

No caso em que os escalares são números reais damos a $\mathbb{C}^n$ uma estrutura de espaço vetorial real; e no caso que os escalares são números complexo $\mathbb{C}^n$ é um espaço vetorial complexo.

Exercício 3.1 Considere o conjunto $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\}$ com as operações:

Adição: $(x_1,\ y_1) \oplus (x_2,\ y_2) = (x_1 \cdot x_2,\ y_1 + y_2)$.

Multiplicação por Escalar: $\alpha \odot (x,y) = (x^\alpha,\ \alpha \cdot y)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que V é um espaço vetorial real.

(b) Exiba o elemento neutro da adição $\oplus$.

(c) Exiba o simétrico aditivo de (x,y).

(d) Exiba a unidade da operação $\odot$.

■

Solução:

- A adição está bem definida, pois dados $(x_1,\ y_1)$ e $(x_2,\ y_2)$ em V, então $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$.

  Como $(x_1,\ y_1) \oplus (x_2,\ y_2) = (x_1 \cdot x_2,\ y_1 + y_2) \in V$, pois $\underbrace{x_1}_{>0} \cdot \underbrace{x_2}_{>0} > 0$.

- A multiplicação por escalar está bem definida, pois dados $(x,\ y)$ em V, então $x > 0$.

  Como $\alpha \odot (x,\ y) \oplus (x_2,\ y_2) = (x^\alpha,\ \alpha \cdot y) \in V$, pois $x^\alpha \overset{x>0}{>} 0$.

- $(x_1,\ y_1) \oplus (x_2,\ y_2) = (x_1 \cdot x_2,\ y_1 + y_2) = (x_2 \cdot x_1,\ y_2 + y_1) = (x_2,\ y_2) \oplus (x_1,\ y_1)$, portanto $\oplus$ é comutativa.

- $\big((x_1,\ y_1) \oplus (x_2,\ y_2)\big) \oplus (x_3,\ y_3) = (x_2 \cdot x_1,\ y_2 + y_1) \oplus (x_3,\ y_3) = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3,\ y_1 + y_2 + y_3) = (x_1,\ y_1) \oplus (x_2 \cdot x_3,\ y_2 + y_3) = (x_1,\ y_1) \oplus \big((x_2,\ y_2) \oplus (x_3,\ y_3)\big)$, portanto $\oplus$ é associativa.

- Existência de elemento neutro: devemos mostrar que existe $(a,b) \in V$ tal que

$$(x,y) \oplus (a,b) = (x,y) \ \text{ para todo } \ (x,y) \in V.$$

$$(x,y) \oplus (a,b) = (x,y),\ \forall\ (x,y) \in V \iff (x \cdot a, y + b) = (x,y),\ \forall\ (x,y) \in V$$

$$\iff \begin{cases} x \cdot a = x \\ y + b = y \end{cases},\ \forall\ \in V \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}.$$

  Portanto, o elemento da operação $\oplus$ é $0_V = (1,0)$.

- Existência de simétrico de um elemento $(x,y) \in V$: devemos mostrar que existe $(a,b) \in V$ tal que

$$(x,y) \oplus (a,b) = 0_V = (1,0).$$

$$(x,y) \oplus (a,b) = (1,0) \iff (x \cdot a, y + b) = (1,0) \iff \begin{cases} x \cdot a = 1 \\ y + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \overset{x>0}{=} x^{-1} = \dfrac{1}{x} \\ b = -y \end{cases}.$$

  Logo, o elemento simétrico de (x,y) em relação à $\oplus$ é $\left(\dfrac{1}{x},\ -y\right)$.

- $\alpha \odot \big(\beta \odot (x,y)\big) = \alpha \odot (x^\beta,\ \beta y) = \big((x^\beta)^\alpha,\ \alpha \cdot (\beta \cdot y)\big) = (x^{\alpha \cdot \beta},\ \alpha \cdot \beta \cdot y) = (\alpha \cdot \beta) \odot (x,\ y)$.

  Logo vale a condição M_1.

- $\alpha \odot \big((x_1,\ y_1) \oplus (x_2,\ y_2)\big) = \alpha \odot (x_1 \cdot x_2,\ y_1 + y_2) = \big((x_1 \cdot x_2)^\alpha,\ \alpha \cdot (y_1 + y_2)\big)$ $= (x_1^\alpha \cdot x_2^\alpha,\ \alpha \cdot y_1 + \alpha \cdot y_2) = (x_1^\alpha,\ \alpha \cdot y_1) \oplus (x_2^\alpha,\ \alpha \cdot y_2)$.

  Logo vale a condição M_2.

- $(\alpha+\beta)\odot(x,y) = \big(x^{(\alpha+\beta)},\ (\alpha+\beta)\cdot y\big) = (x^{\alpha}\cdot x^{\beta},\ \alpha\cdot y+\beta\cdot y) = (x^{\alpha},\ \alpha\cdot y)\oplus(x^{\beta},\ \alpha\ \beta\cdot y)$ $= \big(\alpha\odot(x,\ y)\big)\oplus\big(\beta\odot(x,\ y)\big)$.

  Logo vale a condição M_3.

- A unidade de $\odot$, se existir, é um número $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que

$$\alpha\odot(x,\ y) = (x,\ y),\ \forall (x,y)\in V.$$

$$\alpha\odot(x,\ y) = (x,\ y),\ \forall (x,y)\in V \Longleftrightarrow (x^{\alpha},\ \alpha\cdot y) = (x,\ y),\ \forall (x,y)\in V$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^{\alpha} = x \\ \alpha\cdot y = y \end{cases},\ \forall (x,y)\in V \Longleftrightarrow \alpha = 1.$$

  Portanto, a unidade da operação $\odot$ é o número 1.

Do desenvolvimento acima concluímos que V com a adição $\oplus$ e a multiplicação por escalar $\odot$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Espaços Vetoriais de Matrizes

O conjunto da matrizes reais de ordem $m\times n$, que denotamos por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, com as operações adição e multiplicação definidas no capítulo 1, é um espaço vetorial real.

Da mesma maneira, o conjunto da matrizes complexas de ordem $m\times n$, que denotamos por $M_{m\times n}(\mathbb{C})$, também é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, é um espaço vetorial real se o corpo considerado é $\mathbb{R}$ e um espaço vetorial complexo se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Os espaços vetoriais acima são chamados **espaços de matrizes**.

Espaços Vetoriais de Funções

Consideremos o conjunto de todas funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, denotado por $\mathscr{F}(\mathbb{R})$, ou seja,

$$\mathscr{F}(\mathbb{R}) = \{f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R};\ f\ \text{é uma função.}\}$$

Em $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ definimos a soma e a multiplicação por escalar da seguinte maneira:

Observações 3.1.5 (a) Denotamos a **função nula**, indicada por f_0, é a função que a todo $x\in\mathbb{R}$ associa o número zero, ou seja,

$$f_0:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R};\quad \text{tal que}\quad f_0(x)=0\quad \text{para todo}\ \ x\in\mathbb{R}.$$

(b) Dada uma função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, a sua **simétrica**, indicada por $-f$, é a função dada por

$$-f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R};\quad \text{tal que}\quad (-f)(x)=-f(x)\quad \text{para todo}\ \ x\in\mathbb{R}.$$

Adição de Funções

Sejam f e g funções em $\mathscr{F}(\mathbb{R})$, a **soma** de f e g é uma função, denotada por $f+g$, dada por:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x),\qquad \text{para todo}\ \ x\in\mathbb{R}.$$

É claro que $f+g\in\mathscr{F}(\mathbb{R})$.

Multiplicação por Escalares em Funções

Sejam f função em $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, a **multiplicação** de f pelo escalar α é uma função, denotada por $\alpha \cdot f$, dada por:

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x), \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Também temos $\alpha \cdot f \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$.

O conjunto $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ com as operações adição e multiplicação por escalar definidas acima é um espaço vetorial real.

Exemplo 3.1.6 O conjunto das funções reais contínuas com domínio $[a,b]$, com a e b reais e $a < b$, e as operações adição e multiplicação por escalar definidas acima, também tem estrutura de espaço vetorial.

Mais precisamente,

$$\mathscr{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ é uma função contínua}\},$$

é um espaço vetorial real.

Os espaços vetoriais acima são chamados **espaços de funções**.

Espaços Vetoriais Polinomiais

Agora consideremos o **conjunto dos polinômios reais** (ou complexos) de grau $\leq n$, para $n \in \mathbb{N}$, com coeficientes reais, denotado por $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathscr{P}_n(\mathbb{C})$).

Um elemento de $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ é um polinômio $p(t)$ dado por

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n,$$

com os coeficientes $a_0,\ a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observações 3.1.7 (a) O **polinômio nulo**, denotado por p_0, é o polinômio que a todo $t \in \mathbb{R}$ associa o número zero, ou seja,

$$p_0(t) = 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

(b) Dado um polinômio $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, o **simétrico** de p, denotado por $-p$, é o polinômio $(-p)$ dado por

$$-p(t) = -(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) = -a_0 - a_1 t - \cdots - a_n t^n$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Podemos considerar a adição e a multiplicação por escalar em $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ como as definidas em funções.

Assim, $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ munido das operações de adição e de multiplicação por escalar é um espaço vetorial real.

Enquanto, que $\mathscr{P}_n(\mathbb{C})$ munido das operações de adição e de multiplicação por escalar sobre $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial real, e se a multiplicação por escalar é sobre $\mathbb{C}$, então $\mathscr{P}_n(\mathbb{C})$ é um espaço vetorial complexo, estes espaços vetoriais são chamados **espaços de polinômios** de grau $\leq n$.

Teorema 3.1.8 (**Lei do Cancelamento**)

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, dados u, v e w elementos quaisquer em V, se $u+v=u+w$, então $v=w$.

Demonstração: Como $u+v=u+w$, somando $(-u)$ em ambos os lados na igualdade temos

$$v=(-u)+u+v=(-u)+u+w=w,$$

como queríamos demonstrar. ■

Teorema 3.1.9 Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, dados u e v elementos quaisquer em V, existe um único $w\in V$ tal que $u+w=v$.

Demonstração: Suponhamos $u+w=v$, somando $(-u)$ em ambos os lados na igualdade temos $w=(-u)+v$.
Portanto, o único $w=(-u)+v$. ■

3.1.2 Propriedades de Espaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, u, $v\in V$ e α, $\beta\in\mathbb{K}$, valem as seguintes propriedades:

EV_1 $0_{\mathbb{K}}\cdot u=0_V$.

EV_2 $\alpha\cdot 0_V=0_V$.

EV_3 $(-\alpha)\cdot u=-(\alpha\cdot u)=\alpha\cdot(-u)$.

EV_4 Se $\alpha\cdot u=0_V$, então ou $\alpha=0_{\mathbb{K}}$ ou $u=0_V$.

EV_5 Se $\alpha\cdot u=\alpha\cdot v$ e $\alpha\neq 0_{\mathbb{K}}$, então $u=v$.

EV_6 Se $\alpha\cdot u=\beta\cdot u$ e $u\neq 0_V$, então $\alpha=\beta$.

EV_7 $-(u+v)=(-u)+(-v)=-u-v$.

EV_8 $u+u=2u$, $u+u+u=3u$, de um modo geral, $\underbrace{u+u+\cdots+u}_{n\text{ vezes}}=nu$.

Verificação:

EV_1 Seja $v=0_{\mathbb{K}}\cdot u$, para todo $u\in V$.
Logo,

$$v+v=0_{\mathbb{K}}\cdot u+0_{\mathbb{K}}\cdot u=0_{\mathbb{K}}\cdot(u+u)=v.$$

Somando $(-v)$ em ambos os lados da igualdade, obtemos $v=0_V$.
Portanto, $v=0_V$.

EV_2 Seja $w=\alpha\cdot 0_V$, para todo $\alpha\in\mathbb{K}$.
Logo,

$$w+w=\alpha\cdot 0_V+\alpha\cdot 0_V=(\alpha+\alpha)\cdot 0_V=w.$$

Somando $(-w)$ em ambos os lados da igualdade, obtemos $w=0_V$.
Portanto, $w=0_V$.

EV_3 Observemos que

$$\alpha\cdot u+(-\alpha)\cdot u=(-\alpha+\alpha)\cdot u=0_V.$$

Portanto, $-(\alpha\cdot u)=(-\alpha)\cdot u$.
De maneira análoga mostramos que $-(\alpha\cdot u)=\alpha\cdot(-u)$.

EV_4 Se $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ o resultado segue de EV_1.
Seja $\alpha \cdot u = 0_V$ com $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$, então α é invertível, ou seja, existe um único $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$.
Logo,

$$u = 1 \cdot u = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot u = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot u) = \alpha^{-1} \cdot 0_V = 0_V.$$

Consequentemente, $u = 0_V$.

EV_5 Como $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$, então α é invertível, e portanto, existe um único $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$.
Logo,

$$u = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot u = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot u) = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot v) = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot v = v.$$

Consequentemente, $u = v$.

EV_6 Somando $-(\alpha \cdot u)$ em ambos os lados da igualdade $\alpha \cdot u = \beta \cdot u$, obtemos

$$\alpha \cdot u + \big(-(\alpha \cdot u)\big) = \beta \cdot u + \big(-(\alpha \cdot u)\big) \Longleftrightarrow 0_V = (\beta - \alpha) \cdot u \overset{EV_4}{\Longleftrightarrow} \beta - \alpha = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \beta.$$

EV_7 Observemos que $-(u+v) = (-1) \cdot (u+v)$.
Logo,

$$-(u+v) = (-1) \cdot (u+v) \overset{M_2}{=} (-1) \cdot u + (-1) \cdot v = (-u) + (-v) \overset{EV_3}{=} -u - v.$$

EV_8 A verificação pode ser feita por indução sobre n. No entanto, não a faremos, pois o conceito de indução foge ao escopo deste texto.

■

3.2 Subespaços Vetoriais

Definição 3.2.1 Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, dizemos que U um subconjunto não vazio de V é um **subespaço vetorial** de V se, e somente se,

(i) Para quaisquer u_1 e u_2 em U tivermos $u_1 + u_2 \in U$.

(ii) U com as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar definidas em V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Exemplos 3.2.1 (a) O subconjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Dados (x_1,y_1) e (x_2,y_2) em S temos $y_1 = x_1$ e y_2, x_2.

Logo, $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1,x_1) + (x_2,x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2) \in S$ e

$$\alpha \cdot (x_1,y_1) = \alpha \cdot (x_1,x_1) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_1) \in S.$$

Além disso, como $S \subset \mathbb{R}^2$, portanto a adição é comutativa e associativa e as propriedades de multiplicação por escalar M_1, M_2 e M_3 se verificam.

Como $(0,0) \in S$; dado $(x,x) \in S$ temos $(-x,-x) \in S$ e $1 \cdot (x,x) = (x,x) \in S$.

Portanto, S é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

(b) O conjunto $\mathscr{C}_0([a,b]) = \{f \in \mathscr{C}([a,b]);\ f(a) = f(b) = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathscr{C}([a,b])$.

Dados f e g em $\mathscr{C}_0([a,b])$ temos $f(a) = f(b) = 0$ e $g(a) = g(b) = 0$.

Como $(f+g)(a) = f(a) + g(a) = 0+0 = 0$ e $(f+g)(b) = f(a) + g(b) = 0+0 = 0$, então $f+g \in \mathscr{C}_0([a,b])$.

Como $\alpha \cdot f$ é tal que $(\alpha \cdot f)(a) = \alpha \cdot f(a) = \alpha \cdot 0 = 0$ e $(\alpha \cdot f)(b) = \alpha \cdot f(b) = \alpha \cdot 0 = 0$, logo $\alpha \cdot f \in \mathscr{C}_0([a,b])$.

Além disso, como $\mathscr{C}_0([a,b]) \subset \mathscr{C}([a,b])$, portanto a adição é comutativa e associativa e as propriedades de multiplicação por escalar M_1, M_2 e M_3 se verificam.

Finalmente, $f_0 \in \mathscr{C}_0([a,b])$, dado $f \in \mathscr{C}_0([a,b])$ temos $-f \in \mathscr{C}_0([a,b])$, pois $(-f)(a) = -f(a) = 0$ e $(-f)(b) = -f(b) = 0$.

E se $f \in \mathscr{C}_0([a,b])$, temos $1 \cdot f = f \in \mathscr{C}_0([a,b])$.

Portanto, $\mathscr{C}_0([a,b])$ é subespaço vetorial de $\mathscr{C}([a,b])$.

(c) O subconjunto $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+y = z-1\}$ não é subespaço de $\mathbb{R}^3$, pois $u_1 = (1,-3,-1)$ e $u_2 = (0,1,2)$ estão em S, mas

$$u_1 + u_2 = (1,-3,-1) + (0,1,2) = (1,-2,1) \notin S, \text{ pois } 1 + (-2) = -1 \neq 1 - 1 = 0.$$

Teorema 3.2.2 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, um subconjunto U não vazio V é um subespaço vetorial de V se, e somente se,

(i) Para quaisquer elementos u_1 e u_2 em U tivermos $u_1 + u_2 \in U$.

(ii) Para todo $u \in U$ e todo $\alpha \in \mathbb{K}$ tivermos $\alpha \cdot u \in U$.

Demonstração:
Suponhamos que U é subespaço vetorial de V, então U com a adição e a multiplicação por escalar de V é um espaço vetorial e portanto valem (i) e (ii).

Reciprocamente, se em U são satisfeitas (i) e (ii), como $U \subset V$, então as condições A_1, A_2, M_1, M_2, M_3 e M_4 são automaticamente satisfeitas, pois são válidas para todos os elementos de V.

Resta mostrar que as condições A_3 e A_4 são satisfeitas em U.

A_3 Para todo $u \in U$ e todo $\alpha \in \mathbb{K}$, temos $\alpha \cdot u \in U$, em particular, $0 \cdot u = 0_V \in U$.

Portanto, U possui elemento neutro.

A_4 Para todo $u \in U$ e todo $\alpha \in \mathbb{K}$, temos $\alpha \cdot u \in U$, em particular, $(-1) \cdot u = -u \in U$.

Logo, todo elemento de U possui simétrico em U.

Consequentemente, U é um subespaço vetorial de V. ■

Observações 3.2.3 (a) Segue do **Teorema 3.2.2** que se U é um subconjunto não vazio de V e $0_v \notin U$, então U não é subespaço de V.

(b) Todo espaço vetorial V tem pelo menos dois subespaços vetoriais:

- O próprio V.
- O conjunto unitário $\{0_V\}$.

Estes subespaços são chamados **subespaços triviais** de V.

Exemplos 3.2.4 (a) O conjunto $U = \{f \in \mathscr{C}([a,b]);\ f(a) = 1\}$ não é um subespaço vetorial de $\mathscr{C}([a,b])$.

Solução: De fato, $f_0 \notin U$, pois $f_0(a) = 0 \neq 1$.

(b) O subconjunto $U = \{p(t) \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R});\ p(2) = 0 \text{ e } p'(-1) = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

Solução:

$U \neq \emptyset$, pois o polinômio nulo p_0 está em U, já que $p_0(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e p_0' também é o polinômio nulo.

Dados p e q em U e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

(i) $(p+q)(2) = p(2) + q(2) = 0+0 = 0$ e $(p+q)'(-1) = p'(-1) + q'(-1) = 0+0 = 0$, portanto $p+q \in U$.

(ii) $(\alpha \cdot p)(2) = \alpha \cdot p(2) = \alpha \cdot 0 = 0$ e $(\alpha \cdot p)'(-1) = \alpha \cdot p'(-1) = \alpha \cdot 0 = 0$, portanto $\alpha \cdot p \in U$.

De (i) e (ii) concluímos que U é subespaço de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

(c) (c_1) O conjunto solução do sistema homogêneo $\begin{cases} -x + 3y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Primeiro observemos que $U \neq \emptyset$, pois o sistema admite pelo menos a solução trivial $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, portanto, $(0,0,0) \in U$.

A matriz ampliada de S é $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$, escalonando obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad L_2 \longrightarrow L_2 + 2L_1 .$$

Assim, a solução do sistema é

$$\begin{cases} -x+3y+z=0 \\ 5y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3y+z \\ z = -5y \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y \\ z = -5y \end{cases}, \quad \text{com } y \in \mathbb{R}.$$

Logo, o conjunto solução do sistema é

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = -2y \ \text{ e } \ z = -5y\}.$$

(i) Dados (x_1,y_1,z_1) e (x_2,y_2,z_2) em U temos $\begin{cases} x_1 = -2y_1 \\ z_1 = -5y_1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x_2 = -2y_2 \\ z_2 = -5y_2 \end{cases}$.

Logo,

$$(x_1,\ y_1,\ z_1) + (x_2,\ y_2,\ z_2) = (-2y_1,\ y_1,\ -5y_1) + (-2y_2,\ y_2,\ -5y_2)$$

$$= (-2y_1 - 2y_2,\ y_1 + y_2,\ -5y_1 - 5y_2) = \big(-2(y_1+y_2),\ y_1+y_2,\ -5(y_1+y_2)\big) \in U.$$

(ii) Além disso,

$$\alpha \cdot (x_1,\ y_1,\ z_1) = \alpha \cdot (-2y_1,\ y_1,\ -5y_1) = (-2\alpha \cdot y_1,\ \alpha \cdot y_1,\ -5\alpha \cdot y_1) \in U.$$

Portanto, de (i) e (ii) concluímos que U é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(c_2) De modo geral, o conjunto solução de um sistema homogêneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Solução:

Para mostrar isto vamos escrever o sistema acima na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por U o conjunto solução do sistema, é claro que $U \neq \emptyset$, pois o sistema admite pelo menos a solução trivial $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \quad\vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$, portanto, $(0,0,\cdots,0) \in U$.

(i) Sejam $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ e $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ em U, então

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\lambda + \mu$ é solução do sistema, ou seja, $\lambda + \mu \in U$.

(ii) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, mostremos que $\alpha \cdot \lambda = \begin{bmatrix} \alpha \cdot \lambda_1 \\ \alpha \cdot \lambda_2 \\ \vdots \\ \alpha \cdot \lambda_n \end{bmatrix} \in U$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \cdot \lambda_1 \\ \alpha \cdot \lambda_2 \\ \vdots \\ \alpha \cdot \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \left(\alpha \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \right)$$

$$= \alpha \cdot \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \right) = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De (i) e (ii) concluímos que U é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

(d) O subconjunto de $M_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} ;\ a_{11} - 2a_{12} + 3a_{21} = 0 \right\}$$

é um subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$.

Solução:

Observemos que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in U \Longleftrightarrow a_{11} - 2a_{12} + 3a_{21} = 0 \Longleftrightarrow a_{11} = 2a_{12} - 3a_{21}$$

$$\Longleftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_{12} - 3a_{21} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

É claro que $U \neq \emptyset$, pois $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in U$, já que $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$.

Sejam $A = \begin{bmatrix} 2a_{12} - 3a_{21} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2b_{12} - 3b_{21} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ em U.

(i) Temos

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 2a_{12} - 3a_{21} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b_{12} - 3b_{21} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2a_{12} - 3a_{21} + (2b_{12} - 3b_{21}) & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(a_{12} + b_{12}) - 3(a_{21} + b_{21}) & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}.$$

Portanto, $A + B \in U$

(ii) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 2a_{12} - 3a_{21} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha \cdot (2a_{12} - 3a_{21}) & \alpha \cdot a_{12} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(\alpha \cdot a_{12}) - 3(\alpha \cdot a_{21}) & \alpha \cdot a_{12} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} \end{bmatrix}.$$

Logo, $\alpha \cdot A \in U$.

De (i) e (ii) concluímos que U é subespaço de $M_2(\mathbb{R})$.

(e) O subconjunto de $M_n(\mathbb{R})$ dado por:

$$U = \{A \in M_n(\mathbb{R});\ tr(A) = 0\}$$

é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{R})$.

Solução:

Como $tr(0_{n\times n}) = 0$, então $U \neq \emptyset$.

(i) Da propriedade TR_2 de traço de matrizes quadradas temos:

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B).$$

Logo, se A e B estão em U, então

$$tr(A+B) = \underbrace{tr(A)}_{0} + \underbrace{tr(B)}_{0} = 0 + 0 = 0.$$

Portanto, $A + B \in U$.

(ii) Da propriedade TR_3 de traço de matrizes quadradas, dado $\alpha \in \mathbb{R}$ temos:

$$tr(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot tr(A).$$

Logo, se A está em U e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$tr(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot \underbrace{tr(A)}_{0} = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Assim, $\alpha \cdot A \in U$.

De (i) e (ii) segue que U é um subespaço de $M_n(\mathbb{R})$.

(f) Os seguintes subconjuntos de $M_n(\mathbb{R})$ definidos por:

$$U = \{A \in M_n(\mathbb{R});\ A^T = A\},$$

$$W = \{A \in M_n(\mathbb{R});\ A^T = -A\}$$

são subespaços vetoriais de $M_n(\mathbb{R})$.

Solução:

(f_1) Como $0_{n\times n}^T = 0_{n\times n}$, então $U \neq \emptyset$.

(i) Sejam A e B estão em U, então

$$(A+B)^T \overset{T_2}{=} A^T + B^T = A + B.$$

Portanto, $A + B \in U$.

(ii) Sejam A em U e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$(\alpha \cdot A)^T \overset{T_3}{=} \alpha \cdot A^T = \alpha \cdot A.$$

Assim, $\alpha \cdot A \in U$.

De (i) e (ii) segue que U é um subespaço de $M_n(\mathbb{R})$.

(f_2) Como $0_{n\times n}^T = 0_{n\times n} = -0_{n\times n}$, então $W \neq \emptyset$.

(i) Sejam A e B estão em W, então

$$(A+B)^T \overset{T_2}{=} A^T + B^T = (-A) + (-B) = -(A+B).$$

Portanto, $A+B \in W$.

(ii) Sejam A em W e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$(\alpha \cdot A)^T \overset{T_3}{=} \alpha \cdot A^T = \alpha \cdot (-A) = -(\alpha \cdot A).$$

Assim, $\alpha \cdot A \in W$.

De (i) e (ii) segue que W é um subespaço de $M_n(\mathbb{R})$.

(g) Verifique se o subconjunto $U = \{A \in M_n(\mathbb{R});\ A^2 = A\}$ de $M_n(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{R})$.

Solução:

O subconjunto U não é subespaço de $M_n(\mathbb{R})$, pois a matriz I_n, identidade de ordem n, está em U, já que $I_n^2 = I_n \cdot I_n = I_n$.

Porém, $2 \cdot I^n \notin U$, pois $(2 \cdot I^n) \cdot (2 \cdot I^n) = 4 \cdot I^n \neq 2 \cdot I^n$.

(h) O subconjunto $U = \big\{p(t) \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R});\ p(-1) = p(1) = 0\big\}$ é um subespaço vetorial de $P_2(\mathbb{R})$.

Solução:

O subconjunto $U \neq \emptyset$, pois o polinômio nulo p_0 está em U, já que $p_0(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e portanto, $p_0(1) = p_0(-1) = 0$.

Dados p e q em U e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

(i) $\begin{cases} (p+q)(1) = p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0 \\ (p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0 + 0 = 0 \end{cases}$, portanto $p+q \in U$.

(ii) $\begin{cases} (\alpha \cdot p)(1) = \alpha \cdot p(1) = \alpha \cdot 0 = 0 \\ (\alpha \cdot p)(-1) = \alpha \cdot p(-1) = \alpha \cdot 0 = 0 \end{cases}$, portanto $\alpha \cdot p \in U$.

De (i) e (ii) concluímos que U é subespaço de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

(i) Os seguintes subconjuntos

$$U = \big\{f \in \mathscr{C}([-a,a]);\ f(-x) = f(x) \text{ para todo } x \in [-a,a]\big\},$$

$$W = \big\{f \in \mathscr{C}([-a,a]);\ f(-x) = -f(x) \text{ para todo } x \in [-a,a]\big\}$$

são subespaços vetoriais de $\mathscr{C}([-a,a])$.

Solução:

(i_1) $U \neq \emptyset$, pois a função nula f_0 está em U, já que:

$$f_0(x) = 0 = f_0(-x) \text{ para todo } x \in [-a,a].$$

Dados f e g em U e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

(i) $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$, portanto $f+g \in U$.

(ii) $(\alpha \cdot f)(-x) = \alpha \cdot f(-x) = \alpha \cdot f(x) = (\alpha \cdot f)(x)$, portanto $\alpha \cdot f \in U$.

De (i) e (ii) concluímos que U é subespaço de $\mathscr{C}([-a,a])$.

(i_2) $W \neq \emptyset$, pois a função nula f_0 está em U, já que:

$$f_0(x) = 0 = -f_0(-x) \text{ para todo } x \in [-a,a].$$

Dados f e g em U e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

(i) $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = \big(-f(x)\big) + \big(-g(x)\big) = -(f+g)(x)$, portanto $f+g \in W$.

(ii) $(\alpha \cdot f)(-x) = \alpha \cdot \big(-f(x)\big) = -\alpha \cdot f(x) = (-\alpha \cdot f)(x)$, portanto $\alpha \cdot f \in W$.

De (i) e (ii) concluímos que W é subespaço de $\mathscr{C}([-a,a])$.

Observações 3.2.5 (a) As funções do conjunto U do exemplo acima são chamadas **funções pares**, enquanto que as funções do conjunto W são chamadas **funções ímpares**.

(b) Toda função f em $\mathscr{C}([-a,a])$ pode ser escrita como a soma de uma função par e uma função ímpar.

De fato, consideremos as funções $g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ e $h(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$, temos:

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x),$$

enquanto que

$$h(-x) = \frac{f(-x)-f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -h(x).$$

Logo, g é função par e h é função ímpar, e é claro que

$$g(x)+h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x).$$

(j) O subconjunto $S = \big\{v \in \mathbb{R}^3;\ v = \alpha(1,-1,1)+(2,1,3)\big\}$ não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Solução:

De fato, $0_{\mathbb{R}^3} \notin S$, pois $\alpha(1,-1,1)+(2,1,3) = (0,0,0)$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha+2 & = & 0 \\ -\alpha+1 & = & 0 \\ \alpha+3 & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & -2 \\ \alpha & = & 1 \\ \alpha & = & -3 \end{array} \right. ,$$

um absurdo!

3.3 Soma, Soma Direta e Intersecção de Subespaços

Teorema 3.3.1 Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Se U e W são subespaços vetoriais de V, então:

(i) A intersecção dos subespaços U e W, $U \cap W = \{v \in V;\ v \in U \ \text{ e } \ v \in W\}$, é um subespaço de V.

(ii) A soma dos subespaços de U e W, $U + W = \{v \in V;\ v = u + w, \ \text{com } \ u \in U \ \text{ e } \ w \in W\}$, é um subespaço de V.

Demonstração:

(i) $U \cap W \neq \emptyset$, pois $0_V \in U$ e $0_V \in W$, logo $0_V \in U \cap W$.

- Sejam v e u em $U \cap W$, então v e u estão em U e v e u estão em W.

  Como U e W são subespaços de V, então $v + u \in U$ e $v + u \in W$.

  Consequentemente $v + u \in U \cap W$.

- Dado v em $U \cap W$, então $v \in U$ e $v \in W$.
  Dado $\alpha \in \mathbb{K}$, como U e W são subespaços de V, então $\alpha \cdot v \in U$ e $\alpha \cdot v \in W$.

  Logo, $\alpha \cdot v \in U \cap W$.

Portanto, $U \cap W$ é subespaço de V.

(ii) $U + W \neq \emptyset$, pois $0_V \in U$ e $0_V \in W$, logo $0_V + 0_V = 0_V \in U + W$.

- Sejam v_1 e v_2 em $U + W$, então $v_1 = u_1 + w_1$ e $v_2 = u_2 + w_2$ com $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$.

  Como U e W são subespaços de V, então $u_1 + u_2 \in U$ e $w_1 + w_2 \in W$.

  Consequentemente, $v_1 + v_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$.

- Dado v em $U + W$, então $v = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$.

  Como U e W são subespaços de V, dado $\alpha \in \mathbb{K}$ temos $\alpha \cdot u \in U$ e $\alpha \cdot w \in W$.

  Logo, $\alpha \cdot v = \alpha \cdot (u + w) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot w \in U + W$.

Portanto, $U + W$ é subespaço de V.

■

Observações 3.3.2 (a) O subespaço $U \cap W$ é chamado **subespaço intersecção** de U e W.

(b) O subespaço $U + W$ é chamado **subespaço soma** de U e W.

(c) No caso em que $U \cap W = \{0_V\}$, o subespaço soma $U + W$ é chamado **subespaço soma direta** e denotado por $U \oplus W$.

(d) Dados V um espaço vetorial, U e W subespaços de um V. De modo geral, $U \cup W$ não é subespaço vetorial de V.

Por exemplo, para $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x,y) \in \mathbb{R};\ x = 0\}$ e $W = \{(x,y) \in \mathbb{R};\ y = 0\}$, respectivamente o eixo y e o eixo x no plano cartesiano, então

$$U \cup W = \{(x,y) \in \mathbb{R};\ x = 0 \text{ ou } y = 0\},$$

ou seja, é o conjunto dos pontos do plano cartesiano que estão ou no eixo x ou no eixo y.

Assim, $(1,0) \in U \cup W$ e $(0,-3) \in U \cup W$, mas $(1,0) + (0,-3) = (1,-3) \notin U \cup W$.

Exemplos 3.3.3 Em cada um casos abaixo, obtenha os subespaços $U \cap W$ e $U + W$, verifique se a soma é direta.

(a) $V = \mathbb{R}^3$ com $\begin{cases} U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = y\} \\ W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 0\} \end{cases}$

Solução:

- $(x,y,z) \in U \cap W \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$
  $\iff (x,y,z) = (x,x,0)$.

  Logo, $U \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = y \text{ e } z = 0\}$.

- $U + W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y,z) = (a,a,b) + (c,d,0)\}$.

  Logo, $(x,y,z) \in U + W \iff \begin{cases} x = a + c \\ y = a + d \\ z = b \end{cases}$, assim tomando $\begin{cases} a = 0 \\ b = z \\ c = x \\ d = y \end{cases}$ podemos escrever um vetor (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ como soma de um vetor de U e um vetor de W.

  Portanto, $U + W = \mathbb{R}^3$, porém a soma não é direta, pois $U \cap W \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

(b) $V = M_2(\mathbb{R})$ com $\begin{cases} U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} . \in M_2(\mathbb{R});\ a_{22} = a_{11} \right\} \\ W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ a_{11} = 0 \ \text{ e } \ a_{21} = -a_{12} \right\} \end{cases}$.

Solução:

- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U \cap W \iff \begin{cases} a = d \\ a = 0 \ \text{ e } \ c = -b \end{cases} \iff a = d = 0 \ \text{ e } \ c = -b$

  $\iff A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$.

  Logo, $U \cap W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$.

- $U + W = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & d \\ -d & e \end{bmatrix} \right\}$

  Logo, $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in U + W \iff \begin{cases} x = a \\ y = b + d \\ z = c - d \\ t = a + e \end{cases}$, assim tomando $\begin{cases} a = x \\ b = y \\ c = z \\ d = 0 \\ e = t - x \end{cases}$ podemos escrever um vetor $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ de $M_2(\mathbb{R})$ como soma de um vetor de U e um vetor de W.

  Portanto, $U + W = M_2(\mathbb{R})$, porém a soma não é direta, pois $U \cap W \neq \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$.

(c) $V = M_n(\mathbb{R})$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, $\begin{cases} U = \{A \in M_n(\mathbb{R});\ A \text{ é simétrica}\} \\ \\ W = \{A \in M_n(\mathbb{R});\ A \text{ é anti-simétrica}\} \end{cases}$.

Solução:

- $A \in U \cap W \iff \begin{cases} A \text{ é simétrica} \\ A \text{ é anti-simétrica} \end{cases} \iff \begin{cases} A = A^T \\ A = -A^T \end{cases} \iff A = -A$

  $\iff 2A = 0_{n\times n} \iff A = 0_{n\times n}$.

  Logo, $U \cap W = \{0_{M_n(\mathbb{R})}\}$.
- Vimos no estudo de matrizes quadradas que toda matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ pode ser escrita como:

$$A = \underbrace{\left(\frac{A + A^T}{2}\right)}_{\text{simétrica}} + \underbrace{\left(\frac{A - A^T}{2}\right)}_{\text{anti-simétrica}}.$$

  Portanto, $U \oplus W = M_n(\mathbb{R})$, a soma é direta pois $U \cap W = \{0_{n\times n}\}$.

(d) $V = \mathscr{F}(\mathbb{R})$ com $\begin{cases} U = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R});\ f \text{ é par}\} \\ \\ W = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R});\ f \text{ é ímpar}\} \end{cases}$.

Solução:

- $f \in U \cap W \iff \begin{cases} f \text{ é par} \\ f \text{ é ímpar} \end{cases} \iff \begin{cases} f(-x) = f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \\ f(-x) = -f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \end{cases}$

  $\iff f(x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R} \iff 2f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

  $\iff f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \iff f = f_0$ a função nula.

  Logo, $U \cap W = \{f_0\}$.
- Vimos que toda função $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$ pode ser escrita como:

$$f(x) = \underbrace{\left(\frac{f(x) + f(-x)}{2}\right)}_{\text{função par}} + \underbrace{\left(\frac{f(x) - f(-x)}{2}\right)}_{\text{função ímpar}}.$$

  Portanto, $U \oplus W = \mathscr{F}(\mathbb{R})$, a soma é direta, pois $U \cap W = \{0_{\mathscr{F}(\mathbb{R})}\}$.

(e) $V = \mathbb{R}^4$ com $\begin{cases} U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = 0 \quad \text{e} \quad z - w = 0\} \\ \\ W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4;\ x - y - z + w = 0\} \end{cases}$.

Solução:

- $(x,y,z,w) \in U \cap W \iff \begin{cases} x = -y \ \ e \ \ w = z \\ x = y + z - w \end{cases} \iff -y = y + z - z$

  $\iff 2y = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff (x,y,z,w) = (0,0,z,z)$.

  Logo, $U \cap W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^3;\ x = y = 0 \quad \text{e} \quad w = z\}$.
- $U + W = \mathbb{R}^4$, veremos isto após enunciarmos o teorema da dimensão da soma e da intersecção.

(f) $V=\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ com $\begin{cases} U=\{p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\in\mathscr{P}_3(\mathbb{R});\ a_3=-a_1\} \\ W=\{p(t)\in\mathscr{P}_3(\mathbb{R});\ p(-1)=p'(-1)=0\} \end{cases}$.

Solução:

- $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\in U\cap W \iff \begin{cases} a_3=-a_1 \\ p(-1)=p'(-1)=0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} a_3=-a_1 \\ a_0-a_1+a_2-a_3=0 \\ a_1-2a_2+3a_3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_3=-a_1 \\ a_0=a_1-a_2+a_3 \\ 2a_2=a_1+3a_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_3=-a_1 \\ a_0=a_1-a_2-a_1=-a_2 \\ 2a_2=a_1-3a_1=-2a_1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_3=-a_1 \\ a_2=-a_1 \\ a_0=a_1 \end{cases}$$

Logo, $U\cap W=\{p(t)=a_1+a_1t-a_1t^2-a_1t^3\in\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\}$.

- $U+W=\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, veremos isto após enunciarmos o teorema da dimensão da soma e da intersecção.

Proposição 3.3.4 Sejam U e W são subespaços de um espaço vetorial V. Se a soma $U\oplus W$ é direta, então para todo $v\in U\oplus W$ sua a decomposição como soma de um elemento de U e um elemento de W é única.

Demonstração:

De fato, dado $v\in U\oplus W$, se existem $u_1,\ u_2\in U$ e $w_1,\ w_2\in W$ com

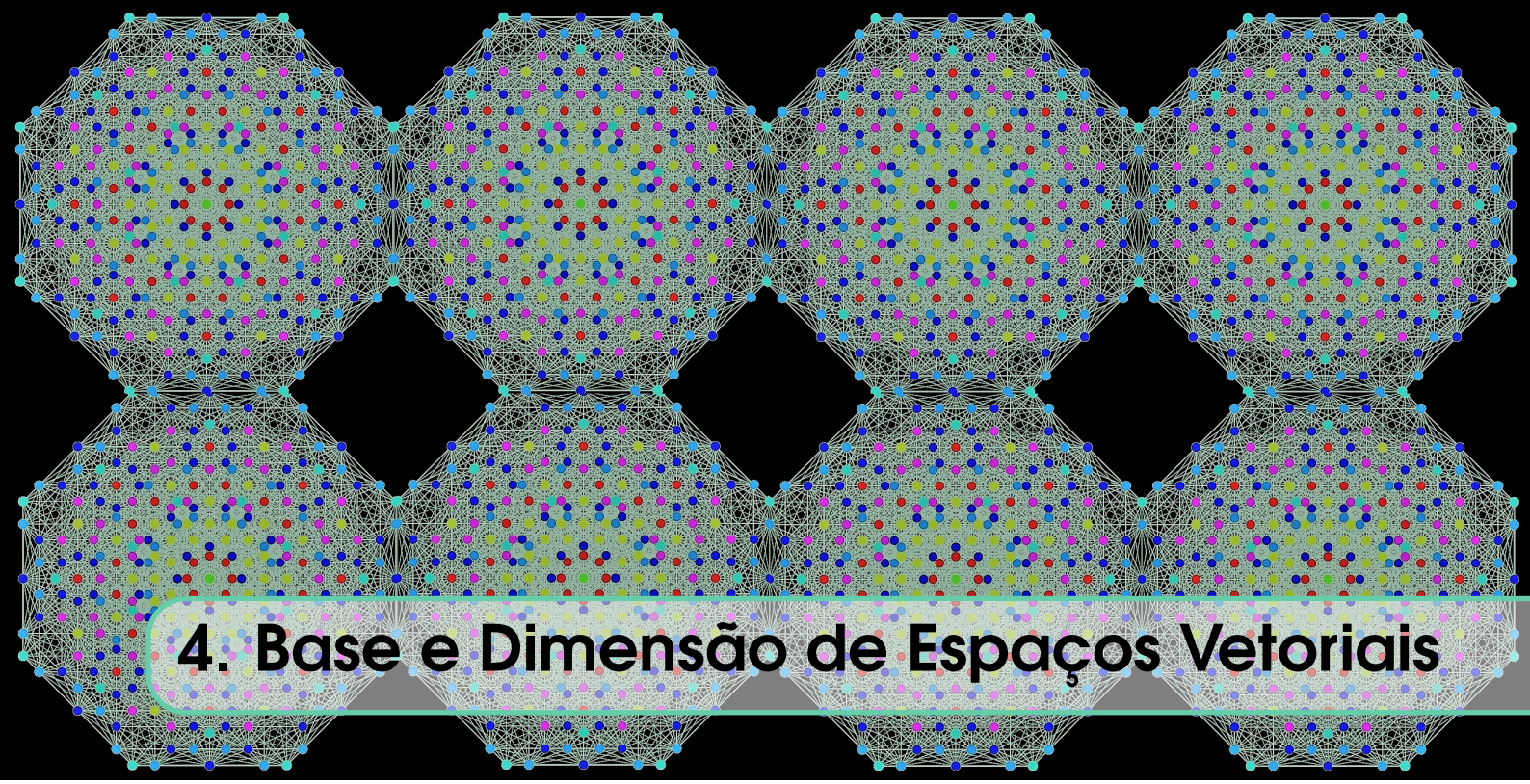
$$v=u_1+w_1=u_2+w_2,$$

consequentemente temos $u_1-u_2=w_2-w_1\in U\cap W$.

Mas, como $V=U\oplus W$, então $U\cap W=\{0_V\}$, daí que devemos ter $u_1-u_2=w_2-w_1=0_V$, e portanto $\begin{cases} u_1 = u_2 \\ w_2 = w_1 \end{cases}$.

Portanto, a decomposição é única. ■

Observação 3.3.5 Segue da proposição acima, que se $V=U\oplus W$, com U e W são subespaços de V, então para cada $v\in V$ existem únicos $u\in U$ e $w\in W$ tais que $v=u+w$.



4. Base e Dimensão de Espaços Vetoriais

4.1 Combinação Linear e Subespaço Gerado

Definição 4.1.1 Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, dizemos que $v \in V$ é uma **combinação linear** de $v_1,\ v_2,\ \cdots, v_n$ vetores em V se, e somente se, existem escalares $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots, \alpha_n$ em $\mathbb{K}$ tais que

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 \ + \ \alpha_2 \cdot v_2 \ + \ \cdots \ + \ \alpha_n \cdot v_n.$$

Exemplos 4.1.1 (a) O vetor $(-2,3)$ é combinação linear dos vetores $(1,0)$ e $(0,1)$ de $\mathbb{R}^2$, pois $(-2,3) = (-2)\cdot(1,0) \ + \ 3\cdot(0,1)$.

(b) O polinômio $p(t) = t^2 + 4t - 7$ é combinação linear dos polinômios

$$p_1(t) = t^2 - 2t + 1 \quad \text{e} \quad p_2(t) = 3t - 4 \quad \text{de} \quad \mathscr{P}_2(\mathbb{R}),$$

$$\text{pois} \quad p(t) = t^2 + 4t - 7 = 1\cdot(t^2 - 2t + 1) + 2\cdot(3t - 4).$$

(c) A matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ é combinação linear das matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{pois} \quad 2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (-3)\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 4\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{de} \quad M_2(\mathbb{R}).$$

Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e S um subconjunto finito de V, indicamos por $[S]$ o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S, ou seja, se $S = \{v_1,\ \cdots,\ v_n\}$, então

$$[S] = \left\{\alpha_1 \cdot v_1 \ + \ \cdots \ + \ \alpha_n \cdot v_n;\ \ \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}\right\}.$$

Proposição 4.1.2 Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e S um subconjunto finito e não vazio de V, então o conjunto $[S]$, de todas as combinações lineares de elementos de S, é um subespaço de V.

Demonstração:

Suponhamos que $S=\{v_1,\ \cdots,\ v_n\}$, então $[S]=\{\alpha_1\cdot v_1\ +\ \cdots\ +\ \alpha_n\cdot v_n;\ \ \alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{K}\}$.

É claro que $[S]\neq\emptyset$, pois como $S\neq\emptyset$ e $S\subset[S]$.
Dados u e v em $[S]$, então existem escalares $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ e $\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n$ em $\mathbb{K}$ tais que $u=\alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+\cdots+\alpha_n\cdot v_n$ e $v=\beta_1\cdot v_1+\beta_2\cdot v_2+\cdots+\beta_n\cdot v_n$, logo:

$$\begin{aligned} u+v &= (\alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+\cdots+\alpha_n\cdot v_n)+(\beta_1\cdot v_1+\beta_2\cdot v_2+\cdots+\beta_n\cdot v_n)\\ \bullet\quad &= \underbrace{(\alpha_1+\beta_1)}_{\in\mathbb{K}}\cdot v_1+\underbrace{(\alpha_2+\beta_2)}_{\in\mathbb{K}}\cdot v_2+\cdots+\underbrace{(\alpha_n+\beta_n)}_{\in\mathbb{K}}\cdot v_n\in[S]\ .\\ \lambda\cdot u &= \lambda\cdot(\alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+\cdots+\alpha_n\cdot v_n)\\ \bullet\quad &= \underbrace{(\lambda\cdot\alpha_1)}_{\in\mathbb{K}}\cdot v_1+\underbrace{(\lambda\cdot\alpha_2)}_{\in\mathbb{K}}\cdot v_2+\cdots+\underbrace{(\lambda\cdot\alpha_n)}_{\in\mathbb{K}}\cdot v_n\in[S]\ . \end{aligned}$$

Portanto, $[S]$ é um subespaço de V. ■

Definição 4.1.2 Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e S um subconjunto finito de V, o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S é chamado **subespaço gerado** pelos elementos de S, ou simplesmente, **subespaço gerado de** S.

Notação: $[S]$.

Observações 4.1.3 (a) Por convenção indicamos $[\emptyset]=\{0_V\}$.

(b) Se $S=\{v_1,\ \cdots,\ v_n\}$, também indicamos o subespaço gerado por S por $[v_1,\ \cdots,\ v_n]$

(c) Se $U=[S]$, dizemos que S é um **sistema de geradores** para o subespaço U.

Exemplos 4.1.4 (a) Em $\mathbb{R}^3$ consideremos $S=\{(1,-2,1),\ (0,1,-1)\}$, então

$$[S]=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ (x,y,z)=a\cdot(1,-2,1)\ +\ b\cdot(0,1,-1);\ a,\ b\in\mathbb{R}\}.$$

Logo, $(x,y,z)\in[S]\Longleftrightarrow(x,y,z)=a\cdot(1,-2,1)\ +\ b\cdot(0,1,-1)=(a,-2a+b,a-b)$.

Portanto, $\begin{cases} x &= a\\ y &= -2a+b\\ z &= a-b \end{cases}\Longrightarrow x=a\ \text{ e }\ y+z=-a=-x.$

Consequentemente, $[S]=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+y+z=0\}$, que é o plano em $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem e tem vetor normal $\vec{n}=(1,1,1)$.

(b) Em $\mathscr{C}([0,2\pi])$ consideremos $S=\{\cos x,\ \text{sen}\,x\}$, então

$$[S]=\{f\in\mathscr{C}([0,2\pi]);\ f(x)=a\cdot\cos x\ +\ b\cdot\ \text{sen}\,x;\ a,\ b\in\mathbb{R}\}.$$

Por exemplo, $f(x)=2\cos x\ -\ \text{sen}\,x\in[S]$.

(c) Seja

$$S=\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

então

$$\begin{aligned}[S] &= \left\{ \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \ \alpha_5 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_6 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \ \alpha_1, \cdots, \alpha_6 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & \alpha_6 \end{bmatrix} ; \ \alpha_1, \cdots, \alpha_6 \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, $[S]$ é o subespaço das matrizes reais triangulares superiores de ordem 3.

(d) Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ uma matriz de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(d_1) O subconjunto

$$\mathscr{L}(A) = \left\{ \alpha_1 \cdot c_1 \ + \ \alpha_2 \cdot c_2 \ + \ \cdots \ + \ \alpha_m \cdot c_m ; \ \alpha_1, \ \alpha_2, \ \cdots, \alpha_m \in \mathbb{R} \right\},$$

com $c_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$ a i-ésima linha de A, para $i \in \{1, \cdots, m\}$, é o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas da matriz A, e denominado **subespaço linha** de A.

(d_2) O subconjunto

$$\mathscr{C}(A) = \left\{ \alpha_1 \cdot v_1 \ + \ \alpha_2 \cdot v_2 \ + \ \cdots \ + \ \alpha_n \cdot v_n ; \ \alpha_1, \ \alpha_2, \ \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\},$$

com $v_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ a j-ésima coluna de A, para $j \in \{1, \cdots, n\}$, é um subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas colunas de A, chamado **subespaço coluna** de A.

(d_3) As soluções do sistema homogêneo $A \cdot X = 0_{m\times 1}$, com $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, denotado por chamado $\mathscr{N}(A)$ e denominado **subespaço nulidade** de A.

No caso em que $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, temos:

(d_1)

$$\mathscr{L}(A) = \{\ \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 & -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \in \mathbb{R}\ \}.$$

Por exemplo, $c = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \in \mathscr{L}(A)$, basta tomar $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$ e $\alpha_4 = -2$.

(d_2)

$$\mathscr{C}(A) = \left\{ \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. = \begin{bmatrix} -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por exemplo, $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathscr{C}(A)$, basta tomar $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -1$ e $\alpha_3 = 2$.

(d_3) O sistema $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é dado por $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ que tem apenas a solução trivial $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

Logo, neste caso $\mathscr{N}(A) = \{(0,\ 0,\ 0)\}$.

(e) Mostre que $p(t) = t^2 + t - 1 \notin [p_1(t),\ p_2(t)] \subset \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, com $\begin{cases} p_1(t) = t^3 - 2 \\ p_2(t) = t + 1 \end{cases}$.

De fato,

$$q(t) \in [p_1(t),\ p_2(t)] \Longleftrightarrow q(t) = a(t^3 - 2) + b(t+1) = a \cdot t^3 + b \cdot t + (b - 2a),\ \text{ com } a,\ b \in \mathbb{R}.$$

Logo, um polinômio em $[p_1(t),\ p_2(t)]$ tem grau 3, ou grau 1 ou grau 0, consequentemente $p(t) \notin [p_1(t),\ p_2(t)]$.

Propriedades de Subespaço Gerado

Sejam V espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e S um subconjunto finito de V, então:

CL_1 $S \subset [S]$.

CL_2 Se S_1 é subconjunto de V tal que $S_1 \subset S$, então $[S_1] \subset [S]$.

CL_3 $[[S]] = [S]$.

CL_4 Se S_1 também é subconjunto de V, então $[S_1 \cup S] = [S] + [S_1]$.

Verificação:

CL_1 Dado $v \in S$, então $v = 1_{\mathbb{K}} \cdot v \in [S]$, portanto $S \subset [S]$.

CL_2 Dado $v \in [S_1]$, então $v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k$, com $v_1, \cdots, v_k \in S_1 \subset S$ e $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{K}$, portanto $v \in [S]$, consequentemente $[S_1] \subset [S]$.

CL_3 Segue da definição.

CL_4 Dado $v \in [S_1 \cup S]$, então

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k + \beta_1 \cdot w_1 + \cdots + \beta_l \cdot w_l,$$

com $v_1, \cdots, v_k \in S_1$, $v_1, \cdots, v_k \in S$ e $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$, $\beta_1, \cdots, \beta_l \in \mathbb{K}$.

Como $\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k \in [S_1]$ e $\beta_1 \cdot w_1 + \cdots + \beta_l \cdot w_l \in [S]$, então $v \in [S_1] + [S]$, logo $[S_1 \cup S] \subset [S_1] + [S]$.

Reciprocamente, se $v \in [S_1] + [S]$, então $v = u + w$, com $u \in [S_1]$ e $w \in [S]$, portanto,

$$u = a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_r \cdot v_r, \quad \text{com} \quad v_1, \cdots, v_r \in S_1 \quad \text{e} \quad a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{K}$$

e

$$w = b_1 \cdot w_1 + \cdots + b_s \cdot w_s, \quad \text{com} \quad w_1, \cdots, w_s \in S \quad \text{e} \quad b_1, \cdots, b_s \in \mathbb{K}.$$

Consequentemente,

$$v = a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_r \cdot v_r + b_1 \cdot w_1 + \cdots + b_s \cdot w_s,$$

com $v_1, \cdots, v_r, w_1, \cdots, w_s \in S_1 \cup S$ e $a_1, \cdots, a_r, b_1, \cdots, b_s \in \mathbb{K}$.

Portanto, $v \in [S_1 \cup S]$ e daí que $[S_1] + [S] \subset [S_1 \cup S]$.

Logo, $[S_1] + [S] = [S_1 \cup S]$.

■

Definição 4.1.3 Dizemos que um espaço vetorial V é **finitamente gerado** se existe S um subconjunto finito de V tal que $V = [S]$.

Exemplos 4.1.5 (a) $\mathbb{R}^n$ é finitamente gerado, pois $\mathbb{R}^n = \Big[(1,0,\cdots,0), (0,1,\cdots,0), \cdots, (0,0,\cdots,1)\Big]$.

(b) $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ é finitamente gerado, pois $\mathscr{P}_n(\mathbb{R}) = \Big[1, \ t, \ \cdots, \ t^n\Big]$.

(c) $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é finitamente gerado, pois $M_{m\times n}(\mathbb{R}) = \left[\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{m\times n} \right]$.

Observação 4.1.6 Existem espaços vetoriais que não são finitamente gerados, por exemplo, o espaço de funções reais $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

Proposição 4.1.7 Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $v_1, \cdots, v_n$ vetores em V, então $[v_1, \cdots, v_n]$ é o *"menor"* subespaço de V que contém o conjunto $\{v_1, \cdots, v_n\}$.

Demonstração: De fato, se W é subespaço de V tal que $\{v_1, \cdots, v_n\} \subset W$, logo para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ em $\mathbb{K}$, devemos ter $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \in W$, ou seja, todo elemento de $[v_1, \cdots, v_n]$ está em W.

Portanto, $[v_1, \cdots, v_n] \subset W$, consequentemente, $[v_1, \cdots, v_n]$ é o *"menor"* subespaço de V que contém $\{v_1, \cdots, v_n\}$. ■

4.2 Dependência e Independência Linear

Definição 4.2.1 Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, dizemos que um subconjunto $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$, de V, é **linearmente independente** se, e somente se, a equação

$$a_1\cdot v_1+a_2\cdot v_2+\cdots+a_k\cdot v_k=0_V$$

tem apenas a solução trivial $a_1=a_2=\cdots=a_k=0$.

No caso em que a equação tem alguma solução não trivial, dizemos que S é **linearmente dependente**.

Observações 4.2.1 (a) Em geral usamos a notação **L.I.** para vetores ou conjunto de vetores linearmente independentes e a notação **L.D.** para designar vetores ou um conjunto de vetores linearmente dependentes.

(b) Por convenção o conjunto vazio, $\emptyset\subset V$, é linearmente independente.

Exemplos 4.2.2 Nos casos abaixo verifique se S é L.I. ou L.D.

(a) $V=\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ e $S=\{t+1,\ t^2-1,\ t+t^2\}$.

Solução:

$a\cdot(t+1)+b\cdot(t^2-1)+c\cdot(t+t^2)=0\iff(a-b)\cdot 1+(a+c)\cdot t+(b+c)\cdot t^2=0$

$$\iff\begin{cases}a-b=0\\a+c=0\\b+c=0\end{cases}\iff\begin{cases}a-b=0\\b+c=0\\b+c=0\end{cases}\iff\begin{cases}a=b\\c=-b\end{cases}.$$

Portanto, por exemplo, $a=b=1$ e $c=-1$ é uma solução da equação, e S é L.D.

(b) $V=M_2(\mathbb{R})$ e $S=\left\{\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}\right\}$.

Solução:

$$a\cdot\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\iff\begin{bmatrix}a&-a+b\\a+b&-b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\iff\begin{cases}a=0\\-a+b=0\\a+b=0\\-b=0\end{cases}\iff\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}.$$

Logo, a única solução da equação é a trivial $a=b=0$, portanto S é L.I.

(c) $V=\mathbb{R}^3$ e $S=\{(1,-1,3),\ (-2,3,-5),\ (0,1,1)\}$.

Solução:

$a\cdot(1,-1,3)+b\cdot(-2,3,-5)+c\cdot(0,1,1)=(0,0,0)$

$$\iff(a-2b,-a+3b+c,3a-5b+c)=(0,0,0)\iff\begin{cases}a-2b=0\\-a+3b+c=0\\3a-5b+c=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}a-2b=0\\b+c=0\\b+c=0\end{cases}\iff\begin{cases}a=2b\\c=-b\end{cases}.$$

Logo, por exemplo, $b=1$, $a=2$ e $c=-1$ é uma solução da equação, e S é L.D.

(d) $V = \mathscr{C}([0,2\pi])$ e $S = \{1, \cos x, \text{sen}\,(2x)\}$.

Solução:

$a\cdot 1 + b\cdot\cos(2x) + c\cdot\ \text{sen}\, x = 0$ para todo $x \in [0,2\pi]$, e para $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ e $x = \dfrac{3\pi}{2}$ temos:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b + c = 0 \\ a - b - c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 0 \\ -2b - c = 0 \\ -2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Portanto, S é L.I.

(e) $V = \mathscr{F}(\mathbb{R})$ e $S = \{1,\ \cos^2 x,\ \text{sen}^2 x\}$.

Solução:

$a\cdot 1 + b\cdot\cos^2 x + c\cdot\ \text{sen}^2 x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, mas como $\cos^2 x + \ \text{sen}^2 x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que a equação acima tem solução não trivial $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$.

Logo, S é L.D.

4.2.1 Propriedades de Dependência e Independência Linear

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, valem as seguintes consequências:

LI_1 $S = \{v\}$ é um subconjunto unitário de V é L.I. se, e somente, se $v \neq 0_V$.

LI_2 Se $S = \{v_1,\ v_2\}$ é um subconjunto de V, com $v_1 \neq 0_V$ ou $v_2 \neq 0_V$, então S é L.D. se, e somente se, v_1 e v_2 são proporcionais.

LI_3 Se S é um subconjunto de V tal que $0_V \in S$, então S é L.D, ou seja, todo conjunto que contém o elemento neutro, 0_V, é linearmente dependente.

LI_4 Se S e S' são subconjuntos finitos de V com $S \subset S'$ e S é L.D., então S' também é L.D., ou seja, todo conjunto que contém um subconjunto L.D. também é L.D.

LI_5 Se S e S' são subconjuntos finitos de V com $S \subset S'$ e S' L.I., então S também é L.I., ou seja, todo subconjunto de um conjunto L.I. também é L.I.

Verificação:

LI_1 $S = \{v\}$ é L.I. se, e somente, se $\alpha\cdot v = 0_V$ tem apenas a solução trivial $\alpha = 0$, portanto $v \neq 0_V$.

É claro que se $v \neq 0_V$ a equação $\beta\cdot v = 0_V$ só tem a solução trivial $\beta = 0$, e portanto, $S = \{v\}$ é L.I.

LI_2 $S = \{v_1,\ v_2\}$ é L.D. se, e somente se, existem $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{K}$ tais que $\alpha_1\cdot v_1 + \alpha_2\cdot v_2 = 0_V$ e $\alpha_1 \neq 0$ ou $\alpha_2 \neq 0$, supondo $\alpha_2 \neq 0$, então $v_1 = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot v_2$ e portanto v_1 e v_2 são proporcionais.

Reciprocamente, se v_1 e v_2 são proporcionais, então existe $\beta \in \mathbb{K}$ tal que

$$v_2 = \beta\cdot v_1 \iff 1\cdot v_2 + (-\beta)v_1 = 0_V.$$

Portanto, $S = \{v_1,\ v_2\}$ é L.D.

LI_3 Suponhamos que $S = \{0_V,\ v_2,\ \cdots,\ v_k\}$, logo a equação

$$\alpha_1 \cdot 0_V + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k = 0_V$$

tem solução não trivial, pois α_1 pode ser qualquer elemento de $\mathbb{K}$.

Portanto, S é linearmente dependente.

LI_4 Suponhamos $S = \{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_k\}$ e $S' = \{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_k,\ w_1\ \cdots\ w_l\}$ e que S é L.D., então existem escalares não todos nulos $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_k$ tais que

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k = 0_V,$$

consequentemente

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k + 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \cdots + 0 \cdot w_l = 0_V$$

é uma solução não trivial e portanto S' também é L.D.

LI_5 De fato se S fosse L.D. pela propriedade LI_4 teríamos S' também L. D., uma contradição.

Portanto, S é L.I.

■

Teorema 4.2.3 Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_k$ vetores em V. O conjunto $S = \{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_k\}$ é linearmente dependente (LD) se, e somente se, um de seus elementos pode ser escrito como combinação linear dos demais elementos.

Demonstração: Suponhamos que $S = \{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_k\}$ é um subconjunto L.D. de V, então a equação

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \cdots + a_k \cdot v_k = 0_V$$

tem alguma solução não trivial.

Suponhamos sem perda de generalidade que uma solução não trivial seja com $a_1 \neq 0$, então temos:

$$a_1 \cdot v_1 = (-a_2) \cdot v_2 - \cdots + (-a_k) \cdot v_k \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \frac{(-a_2)}{a_1} \cdot v_2 + \cdots + \frac{(-a_k)}{a_1} \cdot v_k.$$

Assim, v_1 se escreve como combinação linear dos demais vetores.

Reciprocamente, supondo que $v_1 = \alpha_1 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_{k-1} \cdot v_k$, então temos

$$1 \cdot v_1 - \alpha_1 \cdot v_2 - \cdots - \alpha_{k-1} \cdot v_k = 0_V.$$

Consequentemente, S é linearmente dependente. ■

Proposição 4.2.4 Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $S = \{u_1,\ \cdots,\ u_k\}$ é um subconjunto L.I. de V. Se $v \in V$ se escreve como combinação linear dos vetores S, então v se escreve de maneira única, a menos da ordem das parcelas, como combinação linear dos vetores de S.

Demonstração: De fato, se existem escalares $a_1,\ \cdots,\ a_k$ e $b_1,\ \cdots,\ b_k$ em $\mathbb{K}$ tais que

$$v = a_1 \cdot u_1 + \cdots + a_k \cdot u_k = b_1 \cdot u_1 + \cdots + b_k \cdot u_k$$

$$\Longleftrightarrow a_1 \cdot u_1 + \cdots + a_k \cdot u_k - (b_1 \cdot u_1 + \cdots + b_k \cdot u_k) = 0_V$$

$$\Longleftrightarrow (a_1 - b_1) \cdot u_1 + \cdots + (a_k - b_k) \cdot u_k = 0_V.$$

Como S é subconjunto L.I. de V segue que:

$$a_1 - b_1 = \cdots = a_k - b_k = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 &= b_1 \\ &\vdots \\ a_k &= b_k \end{cases}.$$

Portanto, v se escreve de maneira única como combinação linear dos vetores de S. ■

4.3 Base e Dimensão

4.3.1 Base de um Espaço Vetorial Finitamente Gerado

Agora vamos estabelecer o procedimento para obter um subconjunto finito de um espaço vetorial V finitamente gerado sobre um corpo $\mathbb{K}$, tal que todo vetor deste espaço vetorial pode ser escrito de maneira única como combinação linear dos vetores deste subconjunto.

Definição 4.3.1 Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre um corpo $\mathbb{K}$, um subconjunto finito $\mathscr{B}$ de V é uma **base** de V se, e somente se,

(i) B gera V, ou seja, $[B] = V$.

(ii) B é linearmente independente.

Exemplos 4.3.1 (a) $\mathscr{B} = \{(1,0),\ (0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, pois:

- Para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ podemos escrever $(x,y) = x\cdot(1,0) + y\cdot(0,1)$, logo $[\mathscr{B}] = \mathbb{R}^2$.
- $\mathscr{B}$ é L.I. pela propriedade LI_1.

(b) $\mathscr{B} = \{(1,0),\ (0,1)\}$ é base de $\mathbb{C}^2$, como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, pois:

- Para todo $(x+iy,\ z+iw) \in \mathbb{C}^2$ podemos escrever

$$(x+iy,\ z+iw) = (x+iy)\cdot(1,0) + (z+iw)\cdot(0,1),$$

  logo $[\mathscr{B}] = \mathbb{C}^2$.
- $\mathscr{B}$ é L.I. pela propriedade LI_1.

(c) $\mathscr{B} = \{(1,0),\ (0,1),\ (i,0),\ (0,i)\}$ é base de $\mathbb{C}^2$, como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, pois:

- Para todo $(x+iy, z+iw) \in \mathbb{C}^2$ podemos escrever

$$(x+iy, z+iw) = x\cdot(1,0) + y\cdot(i,0) + z\cdot(0,1) + w\cdot(0,i),$$

  logo $[\mathscr{B}] = \mathbb{C}^2$.
- $\mathscr{B}$ é L.I., pois a equação abaixo tem apenas a solução trivial:

$$a\cdot(1,0) + b\cdot(i,0) + c\cdot(0,1) + d\cdot(0,i) = (0,0) \Longleftrightarrow (a+bi,\ c+di) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}.$$

(d) $\mathscr{B} = \{(1,-1),\ (0,1),\ (1,1)\}$ não é base de $\mathbb{R}^2$, pois $\mathscr{B}$ é L.D. já que

$$(1,-1) = 1\cdot(1,1) + (-2)\cdot(0,1).$$

(e) $\mathscr{B} = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$, pois:

- Para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ podemos escrever $(x,y,z) = x\cdot(1,0,0) + y\cdot(0,1,0) + z\cdot(0,0,1)$, portanto $[\mathscr{B}] = \mathbb{R}^3$.
- $\mathscr{B}$ é L.I., pois a equação vetorial $a\cdot(1,0,0) + b\cdot(0,1,0) + c\cdot(0,0,1) = (0,0,0)$ tem uma única solução $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$.

(f) $\mathscr{B} = \{(1,0,0),\ (0,1,-1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$, pois não existem números reais a e b tais que, por exemplo, $a\cdot(1,0,0) + b\cdot(0,1,-1) = (1,2,3)$.

(g) $\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é base de $M_2(\mathbb{R})$, pois:

- Para toda matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ podemos escrever

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{22}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

  portanto $[\mathscr{B}] = M_2(\mathbb{R})$.
- $\mathscr{B}$ é L.I., pois $a\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\iff \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}.$$

(h) $\mathscr{B} = \{1,\ t,\ t^2\}$ é base de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, pois:

- Para todo $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ podemos escrever $p(t) = a_0\cdot 1 + a_1\cdot t + a_2\cdot t^2$, portanto $[\mathscr{B}] = \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.
- $\mathscr{B}$ é L.I., pois a única solução da equação $a\cdot 1 + b\cdot t + c\cdot t^2 \equiv 0$ é $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$.

Observação 4.3.2 Os espaços vetoriais $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ e $\mathscr{C}([a,b])$ não têm base finita, pois não existe um conjunto finito de funções L.I que gera qualquer função.

4.3.2 Base Canônica

Alguns espaços vetoriais têm uma base especial, considerada a base padrão, essa base é aquela em que, em geral, é imediato escrever um vetor do espaço vetorial como combinação de seus vetores, e é chamada **base canônica**.

Exemplos 4.3.3 (a) A base canônica de $\mathbb{R}^n$ é:

$$\mathscr{B} = \{e_1,\, e_2,\, \cdots,\, e_n\}, \qquad \text{com} \qquad e_i = (0, \cdots, \underbrace{1}_{i-\text{ésima posição}}, \cdots, 0).$$

Observemos que dado $v = (a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_n) \in \mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned} v &= a_1 \cdot (1,\, 0,\, \cdots,\, 0) + a_2 \cdot (0,\, 1,\, \cdots,\, 0) + \cdots + a_n \cdot (0,\, 0,\, \cdots,\, 1) \\ &= a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + \cdots + a_n \cdot e_n \end{aligned}.$$

(a_1) $\mathscr{B} = \{(1,0),\, (0,1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

(a_2) $\mathscr{B} = \{(1,0,0),\, (0,1,0),\, (0,0,1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

(a_3) $\mathscr{B} = \{(1,0,0,0),\, (0,1,0,0),\, (0,0,1,0),\, (0,0,0,1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^4$.

(b) A base canônica de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é:

$$\mathscr{B} = \{E_{11},\, E_{12},\, \cdots, E_{1n}, E_{21},\, E_{22},\, \cdots, E_{2n},\, \cdots,\, E_{m1},\, E_{m2},\, \cdots, E_{mn}\},$$

com $E_{ij} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ a matriz que o elemento da posição ij é 1 e os demais elementos são iguais a 0, ou seja,

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \underbrace{1}_{\text{posição } ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}.$$

Observemos que dado $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, então:

$$\begin{aligned} A &= a_{11} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + a_{12} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_{1n} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots \\ &+ a_{m1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + a_{m2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_{mn} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ &= a_{11} \cdot E_{11} + a_{12} \cdot E_{12} + \cdots + a_{1n} \cdot E_{1n} + \cdots + a_{m1} \cdot E_{m1} + a_{m2} \cdot E_{m2} + \cdots + a_{mn} \cdot E_{mn}. \end{aligned}$$

(b_1) $\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é base canônica de $M_2(\mathbb{R})$

(b_2) $\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é base canônica de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

(c) A base canônica de $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ é:

$$\mathscr{B} = \{1,\ t,\ \cdots,\ t^n\}.$$

Observemos que dado $p(t) = a_0 + a_1\,t + \cdots + a_n\,t^n \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, então

$$p(t) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + \cdots + a_n \cdot t^n.$$

(c_1) $\mathscr{B} = \{1,\ t\}$ é a base canônica de $\mathscr{P}_1(\mathbb{R})$.

(c_2) $\mathscr{B} = \{1,\ t,\ t^2\}$ é a base canônica de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

(c_3) $\mathscr{B} = \{1,\ t,\ t^2,\ t^3\}$ é a base canônica de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

(d) A base $\mathscr{B} = \{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n\}$, com $e_i = (0,\cdots,\ \underbrace{1}_{i-\text{ésima posição}},\cdots,0)$, dada no exemplo (a) acima é também base canônica de $\mathbb{C}^n$, como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Porém, se consideramos $\mathbb{C}^n$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, então a base canônica é:

$$\mathscr{B} = \{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n,\ i\,e_1,\ i\,e_2,\ \cdots,\ i\,e_n\},$$

com i a unidade imaginária.

(d_1) $\mathscr{B} = \{(1,0),\ (0,1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{C}^2$, como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

(d_2) $\mathscr{B} = \{(1,0),\ (0,1),\ (i,0),\ (0,i)\}$ é base canônica de $\mathbb{C}^2$, como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(d_3) $\mathscr{B} = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{C}^3$, como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

(d_4) $\mathscr{B} = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ (i,0,0),\ (0,i,0),\ (0,0,i)\}$ é base canônica de $\mathbb{C}^3$, como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

4.3.3 Dimensão de um Espaço Vetorial Finitamente Gerado

Agora vamos estabelecer o procedimento para obter a dimensão de um espaço vetorial V finitamente gerado sobre um corpo $\mathbb{K}$.

Teorema 4.3.4 Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e S um subconjunto finito de V tal que $[S] = V$, então:

(i) Podemos extrair de S uma base de V.

(ii) Qualquer subconjunto de V com mais do que $\#(S)$ vetores é necessariamente L.D.

Demonstração: Suponhamos que $S = \{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n\}$.

(i) Se S é L.I., então S é uma base de V, pois por hipótese $[S] = V$.

Se S é L.D., então a equação $a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \cdots + a_n \cdot v_n = 0_V$ tem alguma solução não trivial.

Suponhamos sem perda de generalidade que uma solução não trivial seja com $a_n \neq 0$, como $(-a_1) \cdot v_1 + \cdots + (-a_{n-1}) \cdot v_{n-1} = a_n \cdot v_n$, então podemos escrever:

$$v_n = \frac{(-a_1)}{a_n} \cdot v_1 + \cdots + \frac{(-a_{n-1})}{a_n} \cdot v_{n-1} \Longrightarrow v_n \in [v_1,\ \cdots,\ v_{n-1}].$$

Consequentemente, $V = [v_1,\ \cdots,\ v_{n-1}]$

Se $\{v_1,\ \cdots,\ v_{n-1}\}$ é L. I., então essa é uma base de V.

Caso contrário, como S é finito, repetindo o procedimento sucessivamente encontraremos $\mathscr{B}$ um subconjunto de S com $\mathscr{B}$ L.I. e $[\mathscr{B}] = V$.

(ii) Seja $\{w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_m\}$ um subconjunto de V com $m > n = \#(S)$.

Por hipótese sabemos que $V = [S]$ e pelo item (i) podemos extrair de S uma base de V, suponhamos que $\mathscr{B} = \{v_1,\ \cdots,\ v_k\}$ é uma tal base de V, portanto podemos escrever:

$$\begin{array}{rcccccccc} w_1 & = & a_{11}\cdot v_1 & + & a_{12}\cdot v_2 & + & \cdots & + & a_{1k}\cdot v_k \\ w_2 & = & a_{21}\cdot v_1 & + & a_{22}\cdot v_2 & + & \cdots & + & a_{2k}\cdot v_k \\ & \vdots & & & & & & & \\ w_m & = & a_{m1}\cdot v_1 & + & a_{m2}\cdot v_2 & + & \cdots & + & a_{mk}\cdot v_k \end{array}.$$

Assim a equação $\alpha_1\cdot w_1 + \alpha_2\cdot w_2 + \cdots \alpha_m\cdot w_m = 0_V$ é equivalente à seguinte:

$$\begin{aligned} &\alpha_1\cdot(a_{11}\cdot v_1 + a_{12}\cdot v_2 + \cdots + a_{1k}\cdot v_k) \ + \ \alpha_2\cdot(a_{21}\cdot v_1 + a_{22}\cdot v_2 + \cdots + a_{2k}\cdot v_k) \\ &\qquad + \cdots + \alpha_m\cdot(a_{m1}\cdot v_1 + a_{m2}\cdot v_2 + \cdots + a_{mk}\cdot v_k) = 0_V \\ \Longleftrightarrow\ &(\alpha_1\cdot a_{11} + \alpha_2\cdot a_{21} + \cdots + \alpha_m\cdot a_{m1})\cdot v_1 \ + \ (\alpha_1\cdot a_{12} + \alpha_2\cdot a_{22} + \cdots + \alpha_m\cdot a_{m2})\cdot v_2 \\ &\qquad + \cdots + (\alpha_1\cdot a_{1k} + \alpha_2\cdot a_{2k} + \cdots + \alpha_m\cdot a_{mk})\cdot v_k = 0_V. \end{aligned}$$

Como $\{v_1,\ \cdots,\ v_k\}$ é L.I., então devemos ter:

$$\begin{cases} \alpha_1\cdot a_{11} + \alpha_2\cdot a_{21} + \cdots + \alpha_m\cdot a_{m1} = 0 \\ \alpha_1\cdot a_{12} + \alpha_2\cdot a_{22} + \cdots + \alpha_m\cdot a_{m2} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \alpha_1\cdot a_{1k} + \alpha_2\cdot a_{2k} + \cdots + \alpha_m\cdot a_{mk} = 0 \end{cases}$$

um sistema homogêneo com m variáveis, $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$, e k equações com $k \leq n < m$.

Como o sistema é homogêneo $p_c = p_a \leq k < m$, com p_c e p_a, respectivamente, o posto da matriz dos coeficientes e o posto da matriz ampliada do sistema acima.

Logo, pelo **Teorema do Posto (Teo. 2.2.5)** o sistema tem infinitas soluções.

Portanto, $\{w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_m\}$ é L.D.

■

Corolário 4.3.5 Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, se $\mathscr{B}$ é uma base de V, S é um subconjunto L.I de V, então $\#(S) \leq \#(\mathscr{B})$, com # indicando o número de elementos do conjunto.

Demonstração: De fato, se tivéssemos $\#(S) > \#(\mathscr{B})$, como $[\mathscr{B}] = V$, pelo **Teorema 4.3.4 (ii)** teríamos S um conjunto L. D., uma contradição!

Portanto, $\#(S) \leq \#(\mathscr{B})$. ■

Corolário 4.3.6 Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre um corpo $\mathbb{K}$, então qualquer base V tem o mesmo número de elementos.

Demonstração: Sejam $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ bases de V pelo corolário acima como $\mathscr{B}_1$ é base e $\mathscr{B}_2$ é L.I devemos ter $\#(\mathscr{B}_2) \leq \#(\mathscr{B}_1)$.

Por outro lado, como $\mathscr{B}_2$ é base e $\mathscr{B}_1$ é L. I. devemos ter $\#(\mathscr{B}_1) \leq \#(\mathscr{B}_2)$.

Portanto, $\#(\mathscr{B}_1) = \#(\mathscr{B}_2)$. ■

Definição 4.3.2 Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ finitamente gerado. A **dimensão** de V, denotada por $\dim V$, é o número de elementos de uma base de V.

Observações 4.3.7 (a) Se V é um espaço que tem uma base finita, dizemos que V é um **espaço vetorial de dimensão finita**.

(b) No caso em queremos especificar o corpo considerado para obter a dimensão de um espaço vetorial finitamente gerado indicamos a dimensão por $\dim_{\mathbb{K}} V$.

Exemplos 4.3.8 (a) $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

(b) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3 = 3$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^3 = 6$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$.

(c) $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$, $\dim M_3(\mathbb{R}) = 9$, $\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$.

(d) $\dim \mathscr{P}_1(\mathbb{R}) = 2$, $\dim \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) = 3$, $\dim \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) = n+1$.

(e) $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ e $\mathscr{C}([a,b])$ não têm dimensão finita.

Corolário 4.3.9 Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre um corpo $\mathbb{K}$ de dimensão n, se $\mathscr{B}$ é um subconjunto finito de V com n elementos, então $\mathscr{B}$ é L. I. se, e somente se $[\mathscr{B}]$.

Demonstração: Se $\mathscr{B}$ é L. I. e tivéssemos $[\mathscr{B}] \neq V$, então existiria $v \in V$, $v \neq 0_V$ tal que $v \notin [\mathscr{B}]$, consequentemente, pelo **Teorema 4.2.3** teríamos $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B} \cup \{v\}$ um subconjunto L.I. de V, contradizendo o **Teorema 4.3.4 (ii)**.

Portanto, $[\mathscr{B}] = V$.

Reciprocamente, se $[\mathscr{B}] = V$, como $\#(\mathscr{B}) = n = \dim V$, outra vez pelo **Teorema 4.3.4 (ii)** segue que $\mathscr{B}$ é L. I. ■

Teorema 4.3.10 Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ de dimensão finita. Se U é um subespaço de V, então:

(i) $\dim U \leq \dim V$.

(ii) $\dim U = 0$ se, e somente se, $U = \{0_V\}$.

(iii) $\dim U = \dim V$, se e somente se, $U = V$.

Demonstração: Seja $\mathscr{B}_U$ uma base de U, então:

(i) De fato, pois $\dim U = \#(\mathscr{B}_U)$, como $\mathscr{B}_U$ é um subconjunto L. I. de V, então pelo **Teorema 4.3.4 (ii)** temos $\#(\mathscr{B}_U) \leq \dim V$.

(ii) $\dim U = 0$ se, e somente se, $\#(\mathscr{B}_U) = 0$, mas

$$\#(\mathscr{B}_U) = 0 \iff \mathscr{B}_U = \emptyset \iff U = \{0_V\}.$$

(iii) Se $\dim U = \dim V$, então $\mathscr{B}_U$ é um subconjunto L. I. de V com $\#(\mathscr{B}_U) = \dim V$.

Portanto, pelo **Corolário 4.3.9** segue que $\mathscr{B}_U$ é base de V, consequentemente $U = [\mathscr{B}_U] = V$.

A recíproca é imediata.

■

4.3.4 Teorema do Completamento

Teorema 4.3.11 (**Teorema do Completamento**)
Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ de dimensão finita. Se $S = \{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_k\}$ é um subconjunto de L.I. de V, então podemos completar S para formar uma base de V.

Demonstração: Se $k = n = \dim V$, segue que S é base de V.

Se $k < n$, então S não é base de V, consideremos $m = n - k \geq 1$.

Logo, dada $\mathscr{B} = \{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n\}$ base de V, existe $u_{r_1} \in \mathscr{B}$ tal que $u_{r_1} \notin [S]$, logo pelo **Teorema 4.2.3** segue que $S_1 = S \cup \{u_{r_1}\}$ é L. I.

Se $m = 1$, então $\#(S_1) = k+1 = n = \dim V$, portanto S_1 é base de V que contém S.

Caso contrário, $m > 1$ e $[S_1] \neq V$, portanto existe $u_{r_2} \in \mathscr{B}$ tal que $u_{r_2} \notin [S_1]$.

Portanto, pelo **Teorema 4.2.3** segue que $S_2 = S_1 \cup \{u_{r_2}\} = S \cup \{u_{r_1},\ u_{r_2}\}$ é L. I.

Se $m = 2$, então $\#(S_2) = k+2 = n = \dim V$, portanto S_2 é base de V que contém S.

Caso contrário, $m > 2$, repetimos o processo, como $1 \leq m \leq n-1$ este processo é finito, obtemos $\mathscr{B}' = S \cup \{u_{r_1},\ \cdots,\ u_{r_m}\}$ base de V que contém S. ■

Procedimento para o Completamento de uma Base

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ finitamente gerado de dimensão n e $S = \{w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_m\}$, com $m \leq n$, um subconjunto de V. Para determinar uma base de V procedemos da seguinte maneira:

1º Passo: Consideramos $\mathscr{B} = \{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n\}$ a base canônica de V e escrevemos os vetores de S como combinação linear dos vetores $\mathscr{B}$:

$$\begin{array}{rcccccccc} w_1 & = & a_{11}\cdot v_1 & + & a_{12}\cdot v_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\cdot v_n \\ w_2 & = & a_{21}\cdot v_1 & + & a_{22}\cdot v_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\cdot v_n \\ & \vdots & & & & & & & \\ w_m & = & a_{m1}\cdot v_1 & + & a_{m2}\cdot v_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\cdot v_n \end{array}.$$

2º Passo: Consideramos a matriz A dos coeficientes dos vetores de S em relação à $\mathscr{B}$, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

3º Passo: Escalonamos a matriz A obtendo uma matriz A', a forma escalonada de A excluída as linhas nulas:

$$A' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{rl} & \cdots & \alpha_{rn} \end{bmatrix}.$$

Observemos que o conjunto $S' = \{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r\}$, com

$$\begin{array}{rcccccccccccc} u_1 & = & \alpha_{11}\cdot v_1 & + & \alpha_{12}\cdot v_2 & + & \cdots & + & \cdots & + & \cdots & + & \alpha_{1n}\cdot v_n \\ u_2 & = & & & \alpha_{22}\cdot v_2 & + & \cdots & + & \cdots & + & \cdots & + & \alpha_{2n}\cdot v_n \\ & \vdots & & & & & & & & & & & \\ u_r & = & & & & & & & \alpha_{rr}\cdot v_r & + & \cdots & + & \alpha_{rn}\cdot v_n \end{array}$$

gera o mesmo subespaço que S, pois os vetores de S' foram obtidos dos vetores de S por operações elementares que são:

$$\begin{cases} L_i \longleftrightarrow L_j \text{ permuta os vetores } w_i \text{ e } w_j \\ L_i \longrightarrow kL_i,\ \text{com } k \neq 0,\ \text{substitui o vetor } w_i \text{ por } k\cdot w_i \\ L_i \longrightarrow L_i + kL_j,\ \text{com } k \neq 0,\ \text{substitui o vetor } w_i \text{ por } w_i + k\cdot w_j \end{cases}, \text{ que são lineares.}$$

Portanto, $U = [S] = [S']$.

4º Passo: Analisamos os casos:

(i) Se posto de (A)= posto de $(A') = r = n$, então tanto S como S' são bases de V.

(ii) Se posto de (A)= posto de $(A') = r = m < n$, então tanto S e S' são subconjuntos L.I. de V.

Para encontrarmos uma base de V basta completar a matriz $A'_{r\times n}$, adicionando $n-r$ linhas de modo a obter uma matriz $A''_{n\times n}$ na forma escalonada, digamos que seja:

$$A'' = \begin{bmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \cdots & \alpha'_{1r} & \cdots & \alpha'_{1n} \\ 0 & \alpha'_{22} & \cdots & \alpha'_{2r} & \cdots & \alpha'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha'_{rr} & \cdots & \alpha'_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \alpha'_{nn} \end{bmatrix}.$$

O conjunto $\mathscr{B}' = \{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r,\ u_{r+1},\ \cdots,\ u_n\}$, com

$$\begin{array}{rcccccccccccc} u_1 & = & \alpha'_{11}\cdot v_1 & + & \alpha'_{12}\cdot v_2 & + & \cdots & + & \cdots & + & \cdots & + & \alpha'_{1n}\cdot v_n \\ u_2 & = & & & \alpha'_{22}\cdot v_2 & + & \cdots & + & \cdots & + & \cdots & + & \alpha'_{2n}\cdot v_n \\ & \vdots & & & & & & & & & & & \\ u_r & = & & & & & & & \alpha'_{rr}\cdot v_r & + & \cdots & + & \alpha'_{rn}\cdot v_n \\ & \vdots & & & & & & & & & & & \\ u_n & = & & & & & & & & & & & \alpha'_{nn}\cdot v_n \end{array},$$

é uma base de V.

(iii) Se posto de (A)= posto de $(A') = r < m \leq n$, então S e S' são subconjuntos L.D. de V.

O conjunto $\{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r\}$, obtido de A', com

$$\begin{array}{rcccccccccccc} u_1 & = & \alpha_{11}\cdot v_1 & + & \alpha_{12}\cdot v_2 & + & \cdots & + & \cdots & + & \cdots & + & \alpha_{1n}\cdot v_n \\ u_2 & = & & & \alpha_{22}\cdot v_2 & + & \cdots & + & \cdots & + & \cdots & + & \alpha_{2n}\cdot v_n \\ & \vdots & & & & & & & & & & & \\ u_r & = & & & & & & & \alpha_{rr}\cdot v_r & + & \cdots & + & \alpha_{rn}\cdot v_n \end{array},$$

é um subconjunto L. I. de V.

Para obter uma base de V procedemos como no caso **(ii)**, adicionando $n-r$ linhas à matriz A' de modo a obter uma matriz $A''_{n\times n}$ na forma escalonada sem linhas nulas, tal que o conjunto $\mathscr{B}' = \{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r,\ u_{r+1},\ \cdots,\ u_n\}$, obtidos como em **(ii)**, é uma base de V.

Exemplos 4.3.12 Através do conjunto S obtenha uma base de V, nos seguintes casos:

(a) $S = \{1+t,\ t^2-t,\ t^3+t^2+t,\ 2t^3-1\}$ subconjunto de $V = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

Solução:

A base canônica de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ é $\mathscr{B} = \{1,\ t, t^2,\ t^3\}$ e os vetores de S se escrevem como combinação linear dos vetores de $\mathscr{B}$ da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rcl} 1+t & = & 1\cdot t+1\cdot t+0\cdot t^2+0\cdot t^3 \\ t^2-t & = & 0\cdot t-1\cdot t+1\cdot t^2+0\cdot t^3 \\ t^3+t^2+t & = & 0\cdot t+1\cdot t+1\cdot t^2+1\cdot t^3 \\ 2t^3-1 & = & -1\cdot t+0\cdot t+0\cdot t^2+2\cdot t^3 \end{array}.$$

Assim, a matriz dos coeficientes é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

cuja forma escalonada pode ser:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Logo, posto de $(A) = 4$ e portanto S é base de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

(b) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ subconjunto de $V = M_2(\mathbb{R})$.

Solução:

$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$ e os vetores de S se escrevem como combinação linear dos vetores de $\mathscr{B}$ da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (-1)\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (-2)\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 3\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (-4)\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz dos coeficientes dos vetores de S em relação a essa base é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

cuja forma escalonada pode ser:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Logo, posto de $(A) = 3$ e para encontrar uma base, basta completar a matriz acima de modo a encontrar A'' uma matriz 4×4 na forma escalonada, por exemplo:

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathscr{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é base de $M_2(\mathbb{R})$.

(c) $S = \{(1,7,-3,1),\ (3,21,0,-1),\ (2,14,-3,-2)\}$ subconjunto de $\mathbb{R}^4$

Solução:

$\mathscr{B} = \{(1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^4$ e a matriz dos coeficientes dos vetores de S em relação a essa base é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 & 1 \\ 3 & 21 & 0 & -1 \\ 2 & 14 & -3 & -2 \end{bmatrix},$$

cuja forma escalonada pode ser:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, posto de $(A) = 2$ e para encontrar uma base, basta acrescentar duas linhas após as linhas não nulas de A' de modo a encontrar A'' uma matriz 4×4 na forma escalonada, por exemplo:

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathscr{B}' = \{(1,7,-3,1),\ (0,1,1,1),\ (0,0,3,-4),\ (0,0,0,2)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^4$.

4.3.5 Teorema da Soma e da Intersecção de Subespaços

Teorema 4.3.13 (**Teorema da Soma e da Intersecção de Subespaços**)
Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ de dimensão finita, U e W são subespaços de V, então:

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Demonstração: Seja $\mathscr{B}_1 = \{v_1, \cdots, v_k\}$ uma base de $U \cap W$, como $U \cap W$ é subespaço de U e subespaço de W, pelo **Teorema do Completamento 4.3.11** podemos completar a uma base de U e a uma base de W, ou seja, existem $\mathscr{B}_2 = \{v_1, \cdots, v_k, u_1, \cdots, u_r\}$ e $\mathscr{B}_3 = \{v_1, \cdots, v_k, w_1, \cdots, w_s\}$ bases de U e W, respectivamente, com $k+r = \dim U$ e $k+s = \dim W$.

Mostremos que $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_k, u_1, \cdots, u_r, w_1, \cdots, w_s\}$ é uma base de $U+W$.

Seja $v \in U+W$, então $v = u+w$ com $u \in U$ e $w \in W$, logo existem escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \cdots, \beta_r$, $\gamma_1, \cdots, \gamma_k, \delta_1, \cdots, \delta_s$ tais que:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k + \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_r \cdot u_r \\ w &= \gamma_1 \cdot v_1 + \cdots + \gamma_k \cdot v_k + \delta_1 \cdot w_1 + \cdots + \delta_s \cdot w_s. \end{aligned}$$

Logo,

$$v = (\alpha_1+\gamma_1)\cdot v_1 + \cdots + (\alpha_k+\gamma_k)\cdot v_k + \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_r \cdot u_r + \delta_1 \cdot w_1 + \cdots + \delta_s \cdot w_s.$$

Portanto, $v \in [\mathscr{B}]$, como v é elemento arbitrário de V segue que $V = [\mathscr{B}]$.

Resta mostrar que $\mathscr{B}$ é L. I.

Se

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k + \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_r \cdot u_r + \gamma_1 \cdot w_1 + \cdots + \gamma_s \cdot w_s = 0_V. \tag{4.3.1}$$

Consequentemente,

$$\underbrace{\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k + \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_r \cdot u_r}_{\in U} = \underbrace{-(\gamma_1 \cdot w_1 + \cdots + \gamma_s \cdot w_s)}_{\in W}.$$

Logo,

$$-(\gamma_1 \cdot w_1 + \cdots + \gamma_s \cdot w_s) \in U \cap W.$$

Assim, como $\mathscr{B}_1 = \{v_1, \cdots, v_k\}$ é base de $U \cap W$, então existem escalares $\delta_1, \cdots, \delta_k$ tais que:

$$-(\gamma_1 \cdot w_1 + \cdots + \gamma_s \cdot w_s) = \delta_1 \cdot v_1 + \cdots + \delta_k \cdot v_k \Longleftrightarrow$$

$$\gamma_1 \cdot w_1 + \cdots + \gamma_s \cdot w_s + \delta_1 \cdot v_1 + \cdots + \delta_k \cdot v_k = 0_V.$$

Como $\mathscr{B}_3 = \{v_1, \cdots, v_k, w_1, \cdots, w_s\}$ é base de W, segue que $\gamma_1 = \cdots = \gamma_s = \delta_1 = \cdots = \delta_k = 0$.

Logo, em **4.3.1** teremos

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k + \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_r \cdot u_r = 0_V.$$

Como $\mathscr{B}_2 = \{v_1, \cdots, v_k, u_1, \cdots, u_r\}$ é base de U segue que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$.

Consequentemente, $\mathscr{B}$ é L. I. e é base de $U+W$.

Assim,

$$\dim(U+W) = k+r+s = (k+r)+(k+s)-k = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

■

Exemplos 4.3.14 Determine uma base e a dimensão de U, W, $U\cap W$ e $U+W$, nos seguintes casos:

(a) $V=\mathbb{R}^3$ com $\begin{cases} U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x=y\} \\ W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ z=0\} \end{cases}$

Solução:

- $(x,y,z)\in U \iff (x,y,z)=(x,x,z)=x\cdot(1,1,0)+z\cdot(0,0,1)$.
  Assim, $\mathscr{B}_U=\{(1,1,0),\ (0,0,1)\}$ é uma base de U e dim $U=2$.
- $(x,y,z)\in W \iff (x,y,z)=(x,y,0)=x\cdot(1,0,0)+y\cdot(0,1,0)$.
  Logo, $\mathscr{B}_W=\{(1,0,0),\ (0,1,0)\}$ é uma base de W e dim $W=2$.
- Vimos que $U\cap W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x=y \text{ e } z=0\}$.
  Portanto, $(x,y,z)\in U\cap W \iff (x,y,z)=(x,x,0)=x\cdot(1,1,0)$.
  Logo, $\mathscr{B}_{U\cap W}=\{(1,1,0)\}$ é uma base de $U\cap W$ e dim $U\cap W=1$.
- Pelo **Teorema da Soma e da Intersecção de Subespaços (Teo. 4.3.13)** sabemos que

$$\dim(U+W)=\underbrace{\dim U}_{2}+\underbrace{\dim W}_{2}-\underbrace{\dim(U\cap W)}_{1}=3.$$

  Como $U+W$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e dim $U+W=3$, segue que $U+W=\mathbb{R}^3$.

(b) $V=\mathbb{R}^4$ com $\begin{cases} U=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4;\ x+y=0\} \\ W=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4;\ x+z=0 \ \text{ e } \ w=0\} \end{cases}$

Solução:

- $(x,y,z,w)\in U \Leftrightarrow (x,y,z,w)=(x,-x,z,w)=x\cdot(1,-1,0,0)+z\cdot(0,1,0,0)+w\cdot(0,0,0,1)$.
  Assim, $\mathscr{B}_U=\{(1,-1,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,0,1)\}$ é uma base de U e dim $U=3$.
- $(x,y,z,w)\in W \iff (x,y,z,w)=(x,y,-x,0)=x\cdot(1,0,-1,0)+y\cdot(0,1,0,0)$.
  Logo, $\mathscr{B}_W=\{(1,0,-1,0),\ (0,1,0,0)\}$ é uma base de W e dim $W=2$.
- $U\cap W=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4;\ y=-x,\ \ z=-x \ \text{ e } \ w=0\}$.

$$(x,y,z,w)\in U\cap W \iff \begin{cases} y=-x \\ z=-x \\ w=0 \end{cases} \iff (x,y,z,w)=(x,-x,-x,0)=x\cdot(1,-1,-1,0).$$

  Logo, $\mathscr{B}_{U\cap W}=\{(1,-1,-1,0)\}$ é uma base de $U\cap W$ e dim $U\cap W=1$.
- $(x,y,z,w)\in U+W \iff (x,y,z,w)=\underbrace{(a,-a,b,c)}_{\in U}+\underbrace{(d,e,-d,0)}_{\in W} \iff \begin{cases} a+d=x \\ -a+e=y \\ -d+b=z \\ c=w \end{cases}$,

  tomando $\begin{cases} a=x \\ e=y+x \\ b=z \\ d=0 \\ c=w \end{cases}$ podemos escrever qualquer vetor $(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4$ como soma de um vetor de U e um vetor de W.

Logo, $U+W=\mathbb{R}^4$ e dim $U+W=4$.

Vemos que as dimensões encontradas estão de acordo com o **Teorema da Soma e da Intersecção de Subespaços (Teo. 4.3.13)**, pois:

$$\underbrace{\dim\,(U+W)}_{4}=\underbrace{\dim\,U}_{3}+\underbrace{\dim\,W}_{2}-\underbrace{\dim\,(U\cap W)}_{1}=4.$$

(c) $V=M_2(\mathbb{R})$ com $\begin{cases} U=\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{R});\ a_{22}=a_{11}\right\} \\ W=\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{R});\ a_{11}=0 \ \text{ e } \ a_{21}=-a_{12}\right\}\end{cases}$

Solução:

- Dizer que $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\in U$ é equivalente a dizer que:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}=a_{11}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+a_{12}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+a_{21}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

  Assim, $\mathscr{B}_U=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\}$ é uma base de U e dim $U=3$.

- $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\in W\Longleftrightarrow\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & a_{12}\\ -a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}$

$$=a_{12}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}+a_{22}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

  Portanto, $\mathscr{B}_W=\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ é uma base de W e dim $W=2$.

- Vimos que $U\cap W=\left\{\begin{bmatrix} 0 & a_{12}\\ -a_{12} & 0\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{R})\right\}$.

  Logo, $\mathscr{B}_{U\cap W}=\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right\}$ é uma base de $U\cap W$ e dim $U\cap W=1$.

- Pelo **Teorema da Soma e da Intersecção de Subespaços (Teo. 4.3.13)** sabemos que

$$\dim\,(U+W)=\underbrace{\dim\,U}_{3}+\underbrace{\dim\,W}_{2}-\underbrace{\dim\,(U\cap W)}_{1}=4.$$

  Como $U+W$ é subespaço de $M_2(\mathbb{R})$ e dim $U+W=4$, segue que $U+W=M_2(\mathbb{R})$.

(d) $V=\mathbb{R}^4$ com $\begin{cases} U=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4;\ x+y=0 \ \text{ e } \ z-w=0\} \\ W=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4;\ x-y-z+w=0\}\end{cases}$

Solução:

- $(x,y,z,w)\in U\Longleftrightarrow$

$$(x,y,z,w)=(x,-x,z,z)=(x,-x,0,0)+(0,0,z,z)=x\cdot(1,-1,0,0)+z\cdot(0,0,1,1).$$

  Logo, $\mathscr{B}_U=\{(1,-1,0,0),\ (0,0,1,1)\}$ é uma base de U e dim $U=2$.

- $(x,y,z,w) \in W \iff$

$$(x,y,z,w) = (y+z-w,y,z,w) = y\cdot(1,1,0,0)+z\cdot(1,0,1,0)+w\cdot(-1,0,0,1).$$

Assim, $\mathscr{B}_W = \{(1,1,0,0),\ (1,0,1,0),\ (-1,0,0,1)\}$ é uma base de U e dim $W = 3$.

- Vimos que $U \cap W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^3;\ x = y = 0 \quad \text{e} \quad w = z\}$.
Daí que, $(x,y,z,w) \in U \cap W \iff (x,y,z,w) = (0,0,z,z) = z\cdot(0,0,1,1)$.
Portanto, $\mathscr{B}_{U\cap W} = \{(0,0,1,1)\}$ é uma base de $U \cap W$ e dim $U \cap W = 1$.

- Pelo **Teorema da Soma e da Intersecção de Subespaços (Teo. 4.3.13)** sabemos que

$$\dim(U+W) = \underbrace{\dim\ U}_{3} + \underbrace{\dim\ W}_{2} - \underbrace{\dim\ (U\cap W)}_{1} = 4.$$

Como $U+W$ é subespaço de $\mathbb{R}^4$ e dim $U+W = 4$, segue que $U+W = \mathbb{R}^4$.

(e) $V = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ com $\begin{cases} U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R});\ a_3 = -a_1\} \\ W = \{p(t) \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R});\ p(-1) = p'(-1) = 0\} \end{cases}$

Solução:

- $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in U \iff$

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 = a_0 + a_1t + a_2t^2 + (-a_1)t^3 = a_0 + a_1\cdot(t-t^3) + a_2\cdot t^2.$$

Logo, $\mathscr{B}_U = \{1,\ t+t^3,\ t^2\}$ é uma base de U e dim $U = 3$.

- $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in W \iff p(-1) = p'(-1) = 0$

$$\iff \begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 - 2a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = a_1 - a_2 + a_3 \\ a_1 = 2a_2 - 3a_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = 2a_2 - 3a_3 - a_2 + a_3 = a_2 - 2a_3 \\ a_1 = 2a_2 - 3a_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{rcl} p(t) & = & a_2 - 2a_3 + (2a_2 - 3a_3)\cdot t + a_2\cdot t^2 + a_3\cdot t^3 \\ & = & a_2\cdot(1+2t+t^2) + a_3\cdot(-2-3t+t^3) \end{array}.$$

Assim, $\mathscr{B}_W = \{1+2t+t^2,\ -2-3t+t^3\}$ é uma base de W e dim $W = 2$.

- Vimos que $U \cap W = \{p(t) = a_1 + a_1t + (-a_1)t^2 + (-a_1)t^3 \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\}$.
Portanto, $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in U \cap W \iff$

$$p(t) = a_1 + a_1t + (-a_1)t^2 + (-a_1)t^3 = a_1\cdot(1+t-t^2-t^3).$$

Logo, $\mathscr{B}_U = \{1+t-t^2-t^3\}$ é uma base de $U \cap W$ e dim $U \cap W = 1$.

- Pelo **Teorema da Soma e da Intersecção de Subespaços (Teo. 4.3.13)** sabemos que

$$\dim(U+W) = \underbrace{\dim\ U}_{3} + \underbrace{\dim\ W}_{2} - \underbrace{\dim\ (U\cap W)}_{1} = 4.$$

Como $U+W$ é subespaço de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ e dim $U+W = 4$, segue que $U+W = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

Procedimento para Encontrar Base de $U+W$

Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ de dimensão finita, U e W são subespaços de V.

Se $\mathscr{B}_U$ é uma base de U e $\mathscr{B}_W$ é uma base de W, então pela propriedade $\mathbf{CL_4}$ de subespaço gerado segue que:

$$\left[\mathscr{B}_U \cup \mathscr{B}_W\right] = \left[\mathscr{B}_U\right] + \left[\mathscr{B}_W\right] = U + W.$$

Logo, pelo **Teorema 4.3.4 (i)** podemos extrair de $\mathscr{B}_U \cup \mathscr{B}_W$ uma base de $U+W$.

1º Passo: Consideramos $\mathscr{B} = \{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n\}$ a base canônica de V e escrevemos os vetores de $\mathscr{B}_U \cup \mathscr{B}_W$ como combinação linear dos vetores $\mathscr{B}$, sendo $\mathscr{B}_U \cup \mathscr{B}_W = \{u_1,\ \cdots,\ u_k,\ w_1,\ \cdots,\ w_l\}$, então:

$$\begin{array}{rcccccccc}
u_1 &=& a_{11}\cdot v_1 &+& a_{12}\cdot v_2 &+& \cdots &+& a_{1n}\cdot v_n \\
 & \vdots & & & & & & & \\
u_k &=& a_{k1}\cdot v_1 &+& a_{k2}\cdot v_2 &+& \cdots &+& a_{kn}\cdot v_n \\
w_1 &=& b_{11}\cdot v_1 &+& b_{12}\cdot v_2 &+& \cdots &+& b_{1n}\cdot v_n \\
 & \vdots & & & & & & & \\
w_l &=& b_{l1}\cdot v_1 &+& b_{l2}\cdot v_2 &+& \cdots &+& b_{ln}\cdot v_n
\end{array}.$$

2º Passo: Consideramos a matriz A dos coeficientes dos vetores de $\mathscr{B}_U \cup \mathscr{B}_W$ em relação à $\mathscr{B}$, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\
b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln}
\end{bmatrix}.$$

3º Passo: Escalonamos a matriz A obtendo uma matriz A', a forma escalonada de A excluída as linhas nulas:

$$A' = \begin{bmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \cdots & \alpha_{1n} \\
0 & \alpha_{22} & \cdots & \cdots & \alpha_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \alpha_{rs} & \cdots & \alpha_{rn}
\end{bmatrix}.$$

O conjunto $\mathscr{B}' = \{\tilde{v}_1,\ \tilde{v}_2,\ \cdots,\ \tilde{v}_r\}$, com

$$\begin{array}{rcccccccccc}
\tilde{v}_1 &=& \alpha_{11}\cdot v_1 &+& \alpha_{12}\cdot v_2 &+& \cdots &+& \cdots &+& \alpha_{1n}\cdot v_n \\
\tilde{v}_2 &=& & & \alpha_{22}\cdot v_2 &+& \cdots &+& \cdots &+& \alpha_{2n}\cdot v_n \\
 & \vdots & & & & & & & & & \\
\tilde{v}_r &=& & & & & & \alpha_{rs}\cdot v_s &+& \cdots &+& \alpha_{rn}\cdot v_n
\end{array}$$

é L. I. e $\left[\mathscr{B}'\right] = \left[\mathscr{B}_U \cup \mathscr{B}_W\right] = U+W$.

Portanto, $\mathscr{B}'$ é base de $U+W$.

Exemplo 4.3.15 Sejam $U = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$ e $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$ subespaços de $M_2(\mathbb{R})$, determine uma base e a dimensão $U+W$.

Solução:

Podemos verificar facilmente que $\mathscr{B}_U = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ é base de U e que $\mathscr{B}_W = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ é base de W.

Para encontrar uma base de $U+W$ basta extrair de $\mathscr{B}_U \cup \mathscr{B}_W$ um conjunto de geradores L.I. de $U+W$.

Como $\mathscr{B}_U \cup \mathscr{B}_W = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$, basta escalonar a matriz 4×4 cujos elementos são os coeficientes dos respectivos vetores de $\mathscr{B}_U \cup \mathscr{B}_W$ em relação à base canônica de $M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}.$$

A matriz acima à direita está na forma escalonada com a última linha nula, logo, $\mathscr{B}_{U+W} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right\}$ é base de $U+W$ e $\dim(U+W) = 3$.

4.4 Coordenadas de um Vetor

Teorema 4.4.1 Seja V espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ de dimensão n. Se $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é uma base de V, então cada vetor v de V se escreve de maneira única como combinação linear dos vetores de $\mathscr{B}$.

Demonstração: Suponhamos que

$$v = \alpha_1\cdot v_1 + \alpha_2\cdot v_2 + \cdots + \alpha_n\cdot v_n = \beta_1\cdot v_1 + \beta_2\cdot v_2 + \cdots + \beta_n\cdot v_n$$

$$\Longleftrightarrow \alpha_1\cdot v_1 + \alpha_2\cdot v_2 + \cdots + \alpha_n\cdot v_n - (\beta_1\cdot v_1 + \beta_2\cdot v_2 + \cdots + \beta_n\cdot v_n) = 0_V.$$

Logo,

$$(\alpha_1-\beta_1)\cdot v_1 + (\alpha_2-\beta_2)\cdot v_2 + \cdots + (\alpha_n-\beta_n)\cdot v_n = 0_V.$$

Como $\mathscr{B}$ é L.I. devemos ter necessariamente:

$$\begin{cases} a_1 - b_1 = 0 \\ a_2 - b_2 = 0 \\ \vdots \\ a_n - b_n = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_n = b_n \end{cases}$$

Portanto, v escreve de maneira única como combinação linear dos vetores de $\mathscr{B}$. ∎

Definição 4.4.1 Seja V espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ de dimensão finita n, **uma base ordenada** de V é uma base em que está fixada a ordem dos vetores, ou seja, está fixado qual é o primeiro vetor, qual é o segundo vetor até o n-ésimo vetor da base.

Exemplos 4.4.2 Determine as coordenadas de v em relação à base $\mathscr{B}$, nos seguintes casos:

(a) $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, a base canônica de $\mathbb{R}^n$, é uma base ordenada de $\mathbb{R}^n$.

(b) $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, a base canônica de $\mathbb{C}^n$, é uma base ordenada de $\mathbb{C}^n$, como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

(c) $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, i\cdot e_1, i\cdot e_2, \cdots, i\cdot e_n\}$ de $\mathbb{C}^n$, é uma base ordenada de $\mathbb{C}^n$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(d) $\mathscr{B} = \{E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \cdots, E_{2n}, \cdots, E_{m1}, E_{m2}, \cdots, E_{mn}\}$, a base canônica ordenada de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $E_{kl} = [e_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ a matriz com o elemento da posição kl igual a 1 e os demais elementos iguais a 0, é uma base ordenada de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Definição 4.4.2 Sejam V espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ de dimensão finita e $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ uma base ordenada de V. Dado $v \in V$ as **coordenadas** de v em relação à $\mathscr{B}$, indicada por $[v]_{\mathscr{B}}$, são os números $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tais que

$$v = a_1\cdot v_1 + a_2\cdot v_2 + \cdots + a_n\cdot v_n.$$

Notação: $[v]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$.

Exemplos 4.4.3 Determine as coordenadas de v em relação à base $\mathscr{B}$, nos seguintes casos:

(a) $v = (-3,7)$ e $\mathscr{B} = \{(1,1),(0,-1)\}$.

Solução:

Como $(-3,7) = -3(1,1) - 10(0,-1)$, então $[v]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ -10 \end{bmatrix}$.

(b) $v = 2+4t+t^2$ e $\mathscr{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$.

Solução:

Como $2+4t+t^2 = a+b(1+t)+c(1+t+t^2) = (a+b+c)+(b+c)t+ct^2$, temos:

$$\begin{cases} a+b+c = 2 \\ b+c = 4 \\ c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases},$$

então

$$2+4t+t^2 = -2+3(1+t)+(1+t+t^2).$$

Portanto, $[v]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) $v = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ e $\mathscr{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Solução:

Como $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\iff \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b+c & a+b+c+d \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a & = & 2 \\ a+b & = & -3 \\ a+b+c & = & 4 \\ a+b+c+d & = & 7 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = & 2 \\ b & = & -5 \\ c & = & 7 \\ d & = & 3 \end{cases}.$$

Portanto, $[v]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(d) Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 4 e $\mathscr{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3, v_4\}$ uma base de V.

(d_1) Mostre que $\mathscr{B}' = \{v_1+v_2+v_3+v_4,\ v_1+v_2+v_3,\ v_1+v_2, v_1\}$ é uma base de V.

(d_2) Se $[v]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, determine $[v]_{\mathscr{B}'}$.

Solução:

(d_1) Para mostrar que $\mathscr{B}'$ é base, basta mostrar que seus vetores são L. I., pois o número de vetores de $\mathscr{B}'$ é igual a dimensão de V.

Assim, devemos analisar as soluções da equação:

$$\begin{aligned} & a(v_1+v_2+v_3+v_4) + b(v_1+v_2+v_3) + c(v_1+v_2) + dv_1 &&= 0_V \\ \iff \quad & (a+b+c+d)v_1 + (a+b+c)v_2 + (a+b)v_3 + av_4 &&= 0_V \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} a+b+c+d & = & 0 \\ a+b+c & = & 0 \\ a+b & = & 0 \\ a & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d & = & 0 \\ c & = & 0 \\ b & = & 0 \\ a & = & 0 \end{cases}.$$

Portanto, $\mathscr{B}'$ é L. I., consequentemente é uma base de V.

(d_2) Como $[v]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, então $v = 3v_1 - 2v_2 + 4v_3 + v_4$.

Queremos escrever

$$\begin{aligned} v &= a(v_1+v_2+v_3+v_4) + b(v_1+v_2+v_3) + c(v_1+v_2) + dv_1 \\ \iff \quad v &= (a+b+c+d)v_1 + (a+b+c)v_2 + (a+b)v_3 + av_4. \end{aligned}$$

Assim, $v = 3v_1 - 2v_2 + 4v_3 + v_4 = (a+b+c+d)v_1 + (a+b+c)v_2 + (a+b)v_3 + av_4$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a+b+c+d &=& 3 \\ a+b+c &=& -2 \\ a+b &=& 4 \\ a &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} d &=& 5 \\ c &=& -6 \\ b &=& 3 \\ a &=& 1 \end{array}\right. \Longrightarrow [v]_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

(e) Em $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ consideremos o subespaço $U = \left[e^x,\ e^{-x}\right]$.

(e_1) Mostre que $\mathscr{B} = \{e^x,\ e^{-x}\}$ é uma base de U.

(e_2) As funções $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ são vetores de U, determine as coordenadas dessas funções em relação à base $\mathscr{B}$

Solução:

(e_1) Como $U = \left[e^x,\ e^{-x}\right]$, basta mostrar que os vetores de e^x e e^{-x} são L.I., assim vamos analisar as soluções da equação:

$$a \cdot e^x + b \cdot e^{-x} \equiv 0.$$

Assim, $\left\{\begin{array}{l} \text{se } x = 0, \text{ então temos } a+b=0 \\ \text{se } x = \ln 2, \text{ então temos } 2a + \frac{1}{2}b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& 0 \\ 2a+\frac{1}{2}b &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ b &=& 0 \end{array}\right.$.

Portanto, $\mathscr{B}$ é L.I. e consequentemente base de U.

(e_2) Temos $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}e^x + \dfrac{1}{2}e^{-x}$ e $\operatorname{senh} x = \dfrac{1}{2}e^x - \dfrac{1}{2}e^{-x}$.

Logo, $[\cosh x]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e $[\operatorname{senh} x]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

4.5 Matriz Mudança de Base

Sejam V espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ de dimensão finita, $\mathscr{B} = \{v_1,\ v_2,\ \cdots, v_n\}$ e $\mathscr{B}' = \{u_1,\ u_2,\ \cdots, u_n\}$ bases ordenadas de V, dado um vetor $v \in V$ podemos escrevê-lo como:

$$\begin{array}{rcccccccc} v &=& \alpha_1 \cdot v_1 &+& \alpha_2 \cdot v_2 &+& \cdots &+& \alpha_n \cdot v_n \\ v &=& \beta_1 \cdot u_1 &+& \beta_2 \cdot u_2 &+& \cdots &+& \beta_n \cdot u_n \end{array}. \tag{4.5.1}$$

Nosso objetivo é relacionar $[v]_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ e $[v]_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$, as coordenadas de v, respectivamente, em relação à base $\mathscr{B}$ e em relação à base $\mathscr{B}'$.

Já que $\mathscr{B}' = \{u_1,\ u_2,\ \cdots, u_n\}$ é base de V, podemos escrever os vetores de $\mathscr{B}$ como combinação linear dos vetores de $\mathscr{B}'$, ou seja,

$$\begin{cases} v_1 &= a_{11}\cdot u_1 &+ a_{21}\cdot u_2 &+ \cdots &+ a_{n1}\cdot u_n \\ v_2 &= a_{12}\cdot u_1 &+ a_{22}\cdot u_2 &+ \cdots &+ a_{n2}\cdot u_n \\ &\vdots & & & \\ v_n &= a_{1n}\cdot u_1 &+ a_{2n}\cdot u_2 &+ \cdots &+ a_{nn}\cdot u_n \end{cases} \tag{4.5.2}$$

Substituindo em 4.5.1 temos:

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1\cdot(a_{11}\cdot u_1 + a_{21}\cdot u_2 + \cdots + a_{n1}\cdot u_n) + \alpha_2\cdot(a_{12}\cdot u_1 + a_{22}\cdot u_2 + \cdots + a_{n2}\cdot u_n) \\ &\quad + \cdots + \alpha_n\cdot(a_{1n}\cdot u_1 + a_{2n}\cdot u_2 + \cdots + a_{nn}\cdot u_n) \\ &= (\alpha_1\cdot a_{11} + \alpha_2\cdot a_{12} + \cdots + \alpha_n\cdot a_{1n})\cdot u_1 + (\alpha_1\cdot a_{21} + \alpha_2\cdot a_{22} + \cdots + \alpha_n\cdot a_{2n})\cdot u_2 \\ &\quad + \cdots + (\alpha_1\cdot a_{n1} + \alpha_2\cdot a_{n2} + \cdots + \alpha_n\cdot a_{nn})\cdot u_n. \end{aligned}$$

Mas como $v = \beta_1\cdot u_1 + \beta_2\cdot u_2 + \cdots + \beta_n\cdot u_n$ e as coordenadas em relação a uma base são únicas temos necessariamente:

$$\begin{cases} \beta_1 &= \alpha_1\cdot a_{11} &+ \alpha_2\cdot a_{12} &+ \cdots &+ \alpha_n\cdot a_{1n} \\ \beta_2 &= \alpha_1\cdot a_{21} &+ \alpha_2\cdot a_{22} &+ \cdots &+ \alpha_n\cdot a_{2n} \\ &\vdots & & & \\ \beta_n &= \alpha_1\cdot a_{n1} &+ \alpha_2\cdot a_{n2} &+ \cdots &+ \alpha_n\cdot a_{nn} \end{cases}.$$

Assim, matricialmente temos:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}. \tag{4.5.3}$$

Definição 4.5.1 Seja V espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ de dimensão finita, dadas $\mathscr{B} = \{v_1,\ v_2,\ \cdots, v_n\}$ e $\mathscr{B}' = \{u_1,\ u_2,\ \cdots, u_n\}$ bases ordenadas de V, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

que satisfaz **(4.5.3)**, é chamada **matriz mudança de base** de $\mathscr{B}$ para a base $\mathscr{B}'$.

Notação: $M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ ou $[I]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Observações 4.5.1 (a) Comparando $M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ com expressão **(4.5.2)**, vemos que esta matriz é obtida colocando as coordenadas de v_i, em relação a $\mathscr{B}'$, na i-ésima coluna, para todo $i \in \{1,2,\cdots,n\}$.

(b) Analogamente, fazendo o mesmo procedimento acima escrevendo os vetores da base $\mathscr{B}'$ como combinação linear dos vetores da base $\mathscr{B}$, obtemos a matriz $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ mudança de base da base $\mathscr{B}'$ para a base $\mathscr{B}$.

(c) Da equação **(4.5.3)** acima temos:

$$[v]_{\mathscr{B}'} = M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \cdot [v]_{\mathscr{B}}, \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Analogamente, utilizando a matriz mudança de base $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ obtemos:

$$[v]_{\mathscr{B}} = M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \cdot [v]_{\mathscr{B}'}, \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Exemplos 4.5.2 (a) Em $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, determine a matriz mudança de base $M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ da base canônica $\mathscr{B}$ para a base $\mathscr{B}' = \{1+t,\ t^2-t,\ t^3+t^2+t,\ 2t^3-1\}$.

Solução:

Vamos escrever os vetores de $\mathscr{B}'$ em relação aos vetores de $\mathscr{B}$, pois a base $\mathscr{B}$ é canônica:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 1+t & = & 1\cdot t & + & 1\cdot t & + & 0\cdot t^2 & + & 0\cdot t^3 \\ t^2-t & = & 0\cdot t & + & (-1)\cdot t & + & 1\cdot t^2 & + & 0\cdot t^3 \\ t^3+t^2+t & = & 0\cdot t & + & 1\cdot t & + & 1\cdot t^2 & + & 1\cdot t^3 \\ 2t^3-1 & = & (-1)\cdot t & + & 0\cdot t & + & 0\cdot t^2 & + & 2\cdot t^3 \end{array}.$$

Logo, $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, cuja inversa é a matriz

$$M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 4/3 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix},$$

que é a matriz mudança de base de $\mathscr{B}$ para a base $\mathscr{B}'$.

(b) Sejam $\mathbb{R}^3$ e U o subespaço que tem base $\mathscr{B}' = \{(1,5,8),\ (4,-1,5)\}$, sabendo que $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ é a matriz mudança de base de $\mathscr{B}'$ para $\mathscr{B}$, determine a base $\mathscr{B}$ de U.

Solução:

Seja $\mathscr{B} = \{v_1,\ v_2\}$ temos:

$$\begin{cases} (1,\ 5,\ 8) = v_1 + 2v_2 \\ (4,-1,\ 5) = v_1 - v_2 \end{cases} \Longrightarrow 3v_2 = (-3,6,3) \Longleftrightarrow v_2 = (-1,2,1).$$

Consequentemente, $v_1 = (4,-1,5) + v_2 = (4,-1,5) + (-1,2,1) = (3,1,6)$.

Portanto, $\mathscr{B} = \{(3,1,6),\ (-1,2,1)\}$.

Teorema 4.5.3 Sejam V espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ de dimensão finita, $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ e $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ bases ordenadas de V, então:

(i) A matriz mudança de base $M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ é invertível.

(ii) A inversa $\left(M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^{-1}$ é a matriz mudança de base de $\mathscr{B}'$ para $\mathscr{B}$, ou seja,

$$\left(M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} = M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.$$

Consequentemente, $\left(M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} = M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Demonstração:

(i) Pela definição de matriz mudança de base segue que para todo v em V,

$$[v]_{\mathscr{B}'} = M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \cdot [v]_{\mathscr{B}}, \quad \text{e} \quad [v]_{\mathscr{B}} = M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \cdot [v]_{\mathscr{B}'}.$$

Logo,

$$[v]_{\mathscr{B}} = M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \cdot M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \cdot [v]_{\mathscr{B}} \iff I_n \cdot [v]_{\mathscr{B}} = M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \cdot M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \cdot [v]_{\mathscr{B}},$$

para todo v em V, com I_n a matriz identidade de ordem n.

Portanto, pelo **Corolário 1.1.30** segue que

$$M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \cdot M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = I_n.$$

Consequentemente, a matriz $M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ é invertível.

(ii) Segue da igualdade $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \cdot M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = I_n$ que:

$$\left(M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} = M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.$$

Consequentemente, $\left(M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} = M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

■

Exemplos 4.5.4 A matriz $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, com θ um número real, é a matriz de rotação, em torno da origem, do ângulo θ no sentido anti-horário.

Vimos que a matriz R_θ é invertível com inversa $R_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

(a) Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$\mathscr{B}' = \{(\cos\theta, \text{sen}\,\theta), (-\text{sen}\,\theta, \cos\theta)\}$$

é um base de $\mathbb{R}^2$, denotando por $\mathscr{B}$ a base da canônica de $\mathbb{R}^2$.

Mostre que:

R_θ é a matriz de mudança de $\mathscr{B}'$ para $\mathscr{B}$, ou seja, $R_\theta = M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ e que

R_θ^{-1} é a matriz de mudança de $\mathscr{B}$ para $\mathscr{B}'$, ou seja, $R_\theta^{-1} = M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

(b) Determine a matriz de mudança de base da canônica de $\mathbb{R}^2$ para $\mathscr{B}'$ para $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ e para $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Solução:

(a) Como

$$\begin{array}{rcl}(\cos\theta,\ \text{sen}\,\theta) & = & \cos\theta\cdot e_1+\text{sen}\,\theta\cdot e_2\\ (-\text{sen}\,\theta,\ \cos\theta)\} & = & (-\text{sen}\,\theta)\cdot e_1+\cos\theta)\cdot e_2\end{array},$$

segue que

$$M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\text{sen}\,\theta\\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=R_\theta.$$

Consequentemente,

$$R_\theta^{-1}=\left(R_\theta\right)^{-1}=\left(M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1}=M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}.$$

(b) Pelo item anterior basta determinar:

- $R_{\frac{\pi}{2}}^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\\ -\text{sen}\,\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, que é a matriz rotação de $\dfrac{\pi}{2}$.
- $R_{\frac{\pi}{4}}^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\\ -\text{sen}\,\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$, que é a matriz rotação de $\dfrac{\pi}{4}$.

Observação 4.5.5 Seja V espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ de dimensão finita, dadas $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ e $\mathscr{B}''$ bases ordenadas de V, então

$$M_{\mathscr{B}''}^{\mathscr{B}}\ =\ M_{\mathscr{B}''}^{\mathscr{B}'}\cdot M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\ .$$

De fato, pela definição de matriz mudança de base temos:

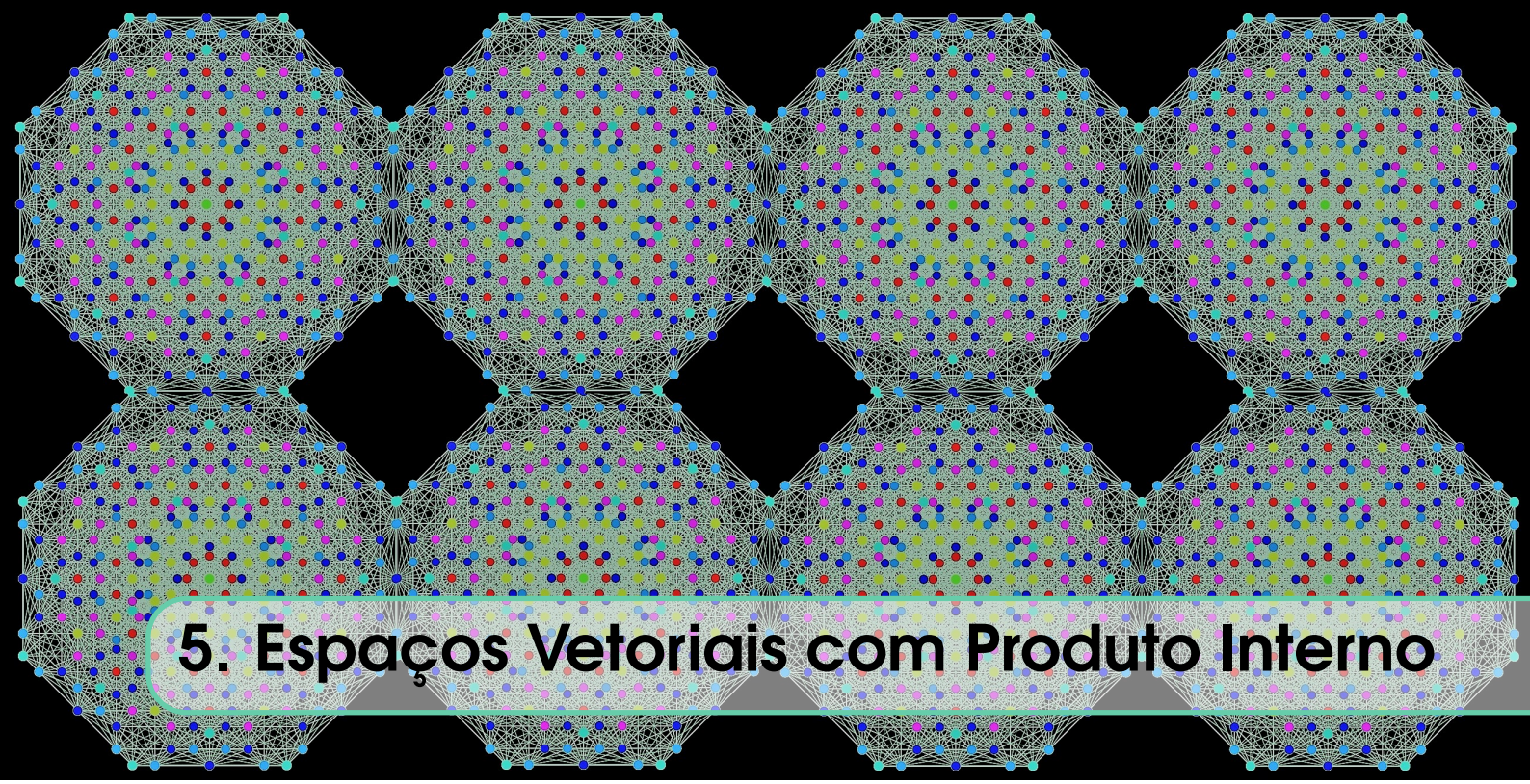
$$[v]_{\mathscr{B}''}\ =\ M_{\mathscr{B}''}^{\mathscr{B}'}\cdot[v]_{\mathscr{B}'}\ =\ M_{\mathscr{B}''}^{\mathscr{B}'}\cdot M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\cdot[v]_{\mathscr{B}}\quad\text{para todo}\quad v\in V.$$

Mas por outro lado, desta definição segue que:

$$[v]_{\mathscr{B}''}\ =\ M_{\mathscr{B}''}^{\mathscr{B}}\cdot[v]_{\mathscr{B}}\quad\text{para todo}\quad v\in V.$$

Portanto,

$$M_{\mathscr{B}''}^{\mathscr{B}'}\cdot M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\ =\ M_{\mathscr{B}''}^{\mathscr{B}}\ .$$



5. Espaços Vetoriais com Produto Interno

5.1 Produto Interno em Espaços Vetoriais Reais

Definição 5.1.1 Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$, um **produto interno** em V é uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} \langle\cdot,\cdot\rangle: & V\times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & \langle u,v\rangle \end{array}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

$PI_{\mathbb{R}1}$ $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$, para quaisquer $u,v\in V$ **simetria**.

$PI_{\mathbb{R}2}$ $\langle v,v\rangle \geq 0$, para todo $v\in V$ e $\langle v,v\rangle = 0 \Longleftrightarrow v = 0_V$ **positividade**.

$PI_{\mathbb{R}3}$ $\langle u+w,v\rangle = \langle u,v\rangle + \langle w,v\rangle$, para quaisquer $u,w,v\in V$ **distributividade**.

$PI_{\mathbb{R}4}$ $\langle \lambda u,v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$, para quaisquer $u,v\in V$ e todo $\lambda\in\mathbb{R}$ **homogeneidade**.

5.1.1 Propriedade do Produto Interno em $\mathbb{R}$

Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, dados $v,\ u,\ w$ elementos quaisquer em V e λ e μ escalares arbitrários em $\mathbb{R}$ valem as seguintes propriedades:

$PI_{\mathbb{R}5}$ $\langle v,\ 0_V\rangle = \langle 0_V,\ v\rangle = 0.$

$PI_{\mathbb{R}6}$ $\langle v,\ \lambda u\rangle = \lambda\langle v,\ u\rangle.$

$PI_{\mathbb{R}7}$ $\langle v,\ u+w\rangle = \langle v,\ u\rangle + \langle v,\ w\rangle.$

$PI_{\mathbb{R}8}$ $\langle \lambda v+\mu u,\ w\rangle = \lambda\langle v,\ w\rangle + \mu\langle u,\ w\rangle$ e $\langle v,\ \lambda u+\mu w\rangle = \lambda\langle v,\ u\rangle + \mu\langle v,\ w\rangle.$

Verificação:

$PI_{\mathbb{R}5}$ De fato,

$$\langle 0_V,\ v\rangle \overset{EV_1}{=} \langle 0\cdot v,\ v\rangle \overset{PI_{\mathbb{R}4}}{=} 0\cdot\langle v,\ v\rangle = 0.$$

Como, $\langle v,\ 0_V\rangle = \langle 0_V,\ v\rangle$, segue a propriedade.

$PI_{\mathbb{R}6}$ Com efeito,

$$\langle v,\ \lambda u\rangle \overset{PI_{\mathbb{R}1}}{=} \langle \lambda u,\ v\rangle \overset{PI_{\mathbb{R}4}}{=} \lambda\langle u,\ v\rangle \overset{PI_{\mathbb{R}1}}{=} \lambda\langle v,\ u\rangle.$$

$PI_{\mathbb{R}7}$ De fato,

$$\langle v,\ u+w\rangle \overset{PI_{\mathbb{R}1}}{=} \langle u+w,\ v\rangle \overset{PI_{\mathbb{R}3}}{=} \langle u,\ v\rangle+\langle w,\ v\rangle \overset{PI_{\mathbb{R}1}}{=} \langle v,\ u\rangle+\langle v,\ w\rangle.$$

$PI_{\mathbb{R}8}$ De fato,

$$\langle \lambda v+\mu u,\ w\rangle \overset{PI_{\mathbb{R}3}}{=} \langle \lambda v,\ w\rangle+\langle \mu u,\ w\rangle \overset{PI_{\mathbb{R}4}}{=} \lambda\langle v,\ w\rangle+\mu\langle u,\ w\rangle.$$

Analogamente mostramos que $\langle v,\ \lambda u+\mu w\rangle = \lambda\langle v,\ u\rangle+\mu\langle v,\ w\rangle$.

■

Observações 5.1.1 (a) A propriedade $PI_{\mathbb{R}8}$ nos diz que o produto interno, em V um espaço vetorial real, é uma **aplicação bilinear**, ou seja, é uma aplicação linear à direita e à esquerda.

(b) Em um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$ pode estar definido mais do que um produto interno.

(c) Em alguns espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ há um produto interno *"mais comum"*, que chamamos de **produto interno usual**, no entanto isto não ocorre em todos os espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$.

5.1.2 Exemplo de Espaços Vetoriais Reais com Produto Interno

Exemplos 5.1.2 (a) Em $\mathbb{R}^n$ o produto interno usual é a aplicação:

$$\begin{array}{rccc}\langle\cdot,\cdot\rangle: & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & \big((x_1,\cdots,x_n),\ (y_1,\cdots,y_n)\big) & \longmapsto & \langle(x_1,\cdots,x_n),\ (y_1,\cdots,y_n)\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n.\end{array}$$

De fato, sejam $(x_1,\cdots,x_n)$, $(y_1,\cdots,y_n)$ e $(z_1,\cdots,z_n)$ elementos quaisquer em $\mathbb{R}^n$ e $\lambda\in\mathbb{R}$, então:

(i) $\langle(x_1,\cdots,x_n),\ (y_1,\cdots,y_n)\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n = y_1x_1+\cdots+y_nx_n$
$= \langle(y_1,\cdots,y_n),\ (x_1,\cdots,x_n)\rangle.$

(ii) $\langle(x_1,\cdots,x_n),\ (x_1,\cdots,x_n)\rangle = x_1x_1+\cdots+x_nx_n = x_1^2+\cdots+x_n^2\geq 0.$

E $\langle(x_1,\cdots,x_n),\ (x_1,\cdots,x_n)\rangle = 0 \Longleftrightarrow x_1^2+\cdots+x_n^2 = 0$

$$\Longleftrightarrow x_1=\cdots=x_n=0 \Longleftrightarrow (x_1,\cdots,x_n)=0_{\mathbb{R}^n}.$$

(iii) $\langle(x_1,\cdots,x_n)+(y_1,\cdots,y_n),\ (z_1,\cdots,z_n)\rangle = \langle(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n),\ (z_1,\cdots,z_n)\rangle$
$= (x_1+y_1)z_1+\cdots+(x_n+y_n)z_n = x_1z_1+y_1z_1+\cdots+x_nz_n+y_nz_n$
$= x_1z_1+\cdots+x_nz_n+y_1z_1+\cdots+y_nz_n$
$= \langle(x_1,\cdots,x_n),\ (z_1,\cdots,z_n)\rangle+\langle(y_1,\cdots,y_n),\ (z_1,\cdots,z_n)\rangle.$

(iv) $\langle\lambda(x_1,\cdots,x_n),\ (y_1,\cdots,y_n)\rangle = \langle(\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n),\ (y_1,\cdots,y_n)\rangle = (\lambda x_1)y_1+\cdots+(\lambda x_n)y_n$
$= \lambda(x_1y_1)+\cdots+\lambda(x_ny_n) = \lambda(x_1y_1+\cdots+x_ny_n = \lambda\langle(x_1,\cdots,x_n),\ (y_1,\cdots,y_n)\rangle.$

(a_1) Em $\mathbb{R}^2$ o produto interno usual é dado por:

$$\langle (x_1,x_2),\ (y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Assim, por exemplo, $\big\langle (1,-2),\ (3,1)\big\rangle = 3-2 = 1$ e $\langle (1,0),\ (0,1)\rangle = 0+0 = 0.$

(a_2) Em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual é dado por:

$$\langle (x_1,x_2,x_3),\ (y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Por exemplo,

$$\big\langle (4,1,-2),\ (3,-5,2)\big\rangle = 12-5-4 = 3 \text{ e } \big\langle (0,1,0),\ (0,0,1)\big\rangle = 0+0+0 = 0.$$

(b) Em $\mathscr{C}([a,b])$ o produto interno usual é a aplicação:

$$\begin{array}{rccl} \langle\cdot,\cdot\rangle: & \mathscr{C}([a,b])\times\mathscr{C}([a,b]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \longmapsto & \langle f,g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx. \end{array}$$

De fato, sejam f, g e h elementos quaisquer em $\mathscr{C}([a,b])$ e $\lambda\in\mathbb{R}$, então:

(i) $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)f(x)\,dx = \langle g,f\rangle.$

(ii) $\langle f,f\rangle = \displaystyle\int_a^b f(x)f(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x)\big)^2\,dx \geq 0.$

E $\langle f,f\rangle = 0 \Longleftrightarrow \displaystyle\int_a^b \big(f(x)\big)^2\,dx = 0 \Longleftrightarrow \big(f(x)\big)^2$ em $[a,b]$, se e somente se, f é a função nula em $[a,b]$.

(iii) $\langle f+g,\ h\rangle = \displaystyle\int_a^b (f+g)(x)h(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)h(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x)h(x)+g(x)h(x)\big)\,dx$

$= \displaystyle\int_a^b f(x)h(x)\,dx + \int_a^b g(x)h(x)\,dx = \langle f,\ h\rangle + \langle g,\ h\rangle.$

(iv) $\langle \lambda f,\ g\rangle = \displaystyle\int_a^b (\lambda f)(x)g(x)\,dx = \int_a^b \big(\lambda f(x)\big)g(x)\,dx = \int_a^b \lambda\big(f(x)g(x)\big)\,dx$

$= \lambda\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lambda\langle f,\ g\rangle.$

Assim, por exemplo, como $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ e $g(x) = x^2-1$, ambas são funções contínuas em $[0,1]$, então:

$$\begin{aligned} \langle f,g\rangle &= \left\langle \frac{1}{x+1}, x^2-1\right\rangle = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\cdot(x^2-1)\,dx = \int_0^1 (x-1)\,dx \\ &= (x^2-x+c)\Big|_0^1 = (1-1+c)-(0-0+c) = 0. \end{aligned}$$

(c) Em $M_n(\mathbb{R})$ o produto interno usual é a aplicação:

$$\begin{array}{rccl} \langle\cdot,\cdot\rangle: & M_n(\mathbb{R})\times M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (A,B) & \longmapsto & \langle A,B\rangle = tr(B^T\cdot A), \end{array}$$

com $tr(B^T\cdot A)$ o traço da matriz $B^T\cdot A$.

De fato, sejam A, B e C elementos quaisquer em $M_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

(i) $\langle A,B\rangle = tr(B^T \cdot A) \overset{TR_1}{=} tr(B^T \cdot A)^T \overset{T_4}{=} tr(A^T \cdot B) = \langle B,A\rangle$.

(ii) $\langle A,A\rangle = tr(A^T \cdot A) \overset{\text{Obs. } 1.1.32}{=} \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$.

E $\langle A,A\rangle = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0 \Longleftrightarrow a_{ij}^2 = 0$ para todo $i,\ j \Longleftrightarrow a_{ij} = 0$ para todo $i,\ j \Longleftrightarrow A = 0_{n\times n}$.

(iii) $\langle A+B,\ C\rangle = tr\big(C^T \cdot (A+B)\big) = tr\big(C^T \cdot A + C^T \cdot B\big) \overset{TR_2}{=} tr(C^T \cdot A) + tr(C^T \cdot B)$
$= \langle A,\ C\rangle + \langle B,\ C\rangle$.

(iv) $\langle \lambda A,\ B\rangle = tr\big(B^T \cdot (\lambda A)\big) = tr\big(\lambda (B^T \cdot A)\big) \overset{TR_3}{=} \lambda\ tr(B^T \cdot A) = \lambda\ \langle A,\ B\rangle$.

(c_1) Em $M_2(\mathbb{R})$ o produto interno usual, dadas $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{aligned} \langle A,B\rangle &= tr(B^T \cdot A) = tr\left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) \\ &= tr \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21} & a_{12}b_{11}+a_{22}b_{21} \\ a_{11}b_{12}+a_{21}b_{22} & a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21}+a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22} = \sum_{1\leq i,j\leq 2} a_{ij}b_{ij}. \end{aligned}$$

Assim, por exemplo,

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0-2-2+4 = 0 \text{ e}$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \right\rangle = 2+(-4)+(-15)+24 = 3.$$

(c_2) Analogamente, em $M_3(\mathbb{R})$ sejam $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{3\times 3}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{3\times 3}$, então:

$$\begin{aligned} \langle A,B\rangle &= a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23}+a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33} \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq 3} a_{ij}b_{ij}. \end{aligned}$$

Assim, por exemplo,

$$\left\langle \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \right\rangle = 3+0+0+(-4)+4+1+(-6)+0+(-3) = -5.$$

Observações 5.1.3 (a) O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com um produto interno é chamado **espaço euclidiano n-dimensional**.

(b) O espaço vetorial $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ tem vários produtos internos, no entanto não há um usual, por exemplo:

$$\begin{aligned} \langle \cdot,\cdot\rangle : \ \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p,q) &\longmapsto \langle p,q\rangle = p(-1)q(-1)+p(0)q(0)+p(1)q(1), \end{aligned}$$

é um produto interno em $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

5.1.3 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Teorema 5.1.4 (**Desigualdade de Cauchy-Schwarz**)
Se V é um espaço vetorial euclidiano, então

$$\langle u,v\rangle^2 \leq \langle u,u\rangle \cdot \langle v,v\rangle$$

para quaisquer u e v em V.

Demonstração:

1º caso: Se u e v são linearmente dependentes, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v = \lambda u$.

Logo

$$\langle u,v\rangle^2 \quad = \quad \langle u,\lambda u\rangle^2 = \langle u,\lambda u\rangle \cdot \langle u,\lambda u\rangle = \lambda\langle u,u\rangle \cdot \langle u,\lambda u\rangle = \langle u,u\rangle \cdot \langle \lambda u,\lambda u\rangle = \langle u,u\rangle \cdot \langle v,v\rangle.$$

Portanto, vale a igualdade.

2º caso: Se u e v são linearmente independentes, então para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ temos $v+\lambda u \neq 0_V$, portanto $\langle v+\lambda u, v+\lambda u\rangle > 0$, ou seja,

$$\underbrace{\langle v+\lambda u, v+\lambda u\rangle}_{>0} = \langle v,v\rangle + \langle v,\lambda u\rangle + \langle \lambda u,v\rangle + \langle \lambda u,\lambda u\rangle = \langle v,v\rangle + 2\lambda\langle u,v\rangle + \lambda^2\langle u,u\rangle > 0.$$

A equação acima é uma equação do segundo grau na variável λ, como é positiva o discriminante deve satisfazer $\Delta < 0$, ou seja,

$$\Delta = 4\langle u,v\rangle^2 - 4\langle u,u\rangle \cdot \langle v,v\rangle < 0 \Longleftrightarrow \langle u,v\rangle^2 < \langle u,u\rangle \cdot \langle v,v\rangle.$$

Consequentemente, para quaisquer u e v em V temos $\langle u,v\rangle^2 \leq \langle u,u\rangle \cdot \langle v,v\rangle$.

■

5.2 Produto Interno em Espaços Vetoriais Complexos

Definição 5.2.1 Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$, um **produto interno complexo** em V é uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} \langle\cdot,\cdot\rangle: & V\times V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (u,v) & \longmapsto & \langle u,v\rangle \end{array}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

$PI_{\mathbb{C}1}$ $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$, para quaisquer $u,v \in V$ **simetria hermitiana**.

$PI_{\mathbb{C}2}$ $\langle v,v\rangle \geq 0$, para todo $v \in V$ e $\langle v,v\rangle = 0 \Longleftrightarrow v = 0_V$ **positividade**.

$PI_{\mathbb{C}3}$ $\langle u+w,v\rangle = \langle u,v\rangle + \langle w,v\rangle$, para quaisquer $u,w,v \in V$ **distributividade**.

$PI_{\mathbb{C}4}$ $\langle \lambda u,v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$, para quaisquer $u,v \in V$ e todo $\lambda \in \mathbb{C}$ **homogeneidade**.

Observações 5.2.1 (a) Segue das propriedades de simetria hermitiana, distributividade e homogeneidade que:

(i) $\langle v, u+w\rangle = \langle v,u\rangle + \langle v,w\rangle$, para quaisquer $u,w,v \in V$.

(ii) $\langle u, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle u,v\rangle$, para quaisquer $u,v \in V$ e todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) A simetria hermitiana é necessária para garantir a propriedade de positividade.

De fato, em V um espaço vetorial complexo, dado $v \in V$, com $v \neq 0_V$, se exigíssemos a simetria teríamos:

$$\langle iv, iv\rangle = i^2 \underbrace{\langle v,v\rangle}_{>0} = -\langle v,v\rangle < 0$$

contrariando a positividade.

Quando consideramos a simetria hermitiana temos:

$$\langle iv, iv\rangle = i\cdot\bar{i}\langle v,v\rangle = \langle v,v\rangle > 0.$$

Exemplo 5.2.2 Em $\mathbb{C}^n$ o produto interno usual é a aplicação:

$$\begin{array}{rccl} \langle\cdot,\cdot\rangle: & \mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \big((u_1,\cdots,u_n),\ (v_1,\cdots,v_n)\big) & \longmapsto & \langle (u_1,\cdots,u_n),\ (v_1,\cdots,v_n)\rangle \\ & & & = u_1\overline{v_1}+\cdots+u_n\overline{v_n}. \end{array}$$

(i) Em $\mathbb{C}^2$ o produto interno usual é dado por:

$$\langle (u_1,u_2),\ (v_1,v_2)\rangle = u_1\overline{v_1}+u_2\overline{v_2}.$$

Assim, por exemplo,

$$\langle (i,0),\ (0,1)\rangle = 0+0=0 \text{ e}$$

$$\langle (i,-1),\ (3+i,1+2i)\rangle = i(3-i)+(-1)(1-2i) = 3i+1-1+2i = 5i.$$

(ii) Em $\mathbb{C}^3$ o produto interno usual é dado por:

$$\langle (u_1,u_2,u_3),\ (v_1,v_2,v_3)\rangle = u_1\overline{v_1}+u_2\overline{v_2}+u_3\overline{v_3}.$$

Assim, por exemplo,

$$\big\langle (4i,\ 1,\ -2+i),\ (3+i,\ 1+i,\ 2i)\big\rangle$$
$$= 4i(3-i)+(1-i)+(-2+i)(-2i) = 12i+4+1-i+4i+2 = 7+15i.$$

Observação 5.2.3 O espaço vetorial $\mathbb{C}^n$ com um produto interno é chamado **espaço unitário** n**-dimensional**.

5.3 Bases Ortogonais e Bases ortonormais

5.3.1 Vetores Ortogonais

Definição 5.3.1 Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, dizemos que u e v em V são **vetores ortogonais** se, e somente se, $\langle u,v\rangle = 0$.

Notação: Se u e v ortogonais indicamos por $u \perp v$.

Exemplos 5.3.1 (a) Em $\mathbb{R}^3$, com o produto interno usual, os vetores $u=(7,-3,2)$ e $v=(2,8,5)$ são ortogonais, pois

$$\big\langle (7,-3,2),(2,8,5)\big\rangle = 14-24+10=0.$$

(b) Em $M_2(\mathbb{R}$, com o produto interno usual, as matrizes $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ são ortogonais, pois vimos que $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0.$

(c) Em $\mathbb{C}^2$, com o produto interno usual, os vetores $u=(1+i,\ i)$ e $v=(i,\ 1-i)$ são ortogonais, pois

$$\big\langle (1+i,\ i),\ (i,\ 1-i)\big\rangle = (1+i)\bar{i}+i\overline{(1-i)} = (1+i)(-i)+i(1+i) = -i+1+i-1=0.$$

Propriedades de Vetores Ortogonais

VO_1 $O_V \perp v$ para todo $v \in V$.

VO_2 Se $u \perp v$, então $v \perp u$.

VO_3 Se $u \perp v$ para todo $v \in V$, então $u = 0_V$.

VO_4 Se $u_1 \perp v$ e $u_2 \perp v$, então $(u_1+u_2) \perp v$.

VO_5 Se $u \perp v$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\lambda u \perp v$.

Verificação:

VO_1 Segue da propriedade $PI_{\mathbb{R}5}$ de produto interno.

VO_2 Segue da propriedade $PI_{\mathbb{R}1}$ de produto interno.

VO_3 De fato, seja $\mathscr{B}=\{v_1,\cdots,v_n\}$ uma base de V, então existem escalares $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n$, tais que $u=\alpha_1\cdot v_1\ +\ \cdots\ +\ \alpha_n\cdot v_n$.

Logo,

$$\langle u,\ u\rangle = \langle \alpha_1\cdot v_1+\cdots+\alpha_n\cdot v_n,\ u\rangle = \alpha_1\ \langle v_1,\ u\rangle\ +\ \cdots\ +\ \alpha_n\ \langle v_n,\ u\rangle = 0.$$

Como, $\langle u,\ u\rangle = 0$ segue pela propriedade $PI_{\mathbb{R}2}$ de produto interno que $u=0_V$.

VO_4 Segue da propriedade $PI_{\mathbb{R}3}$ de produto interno.

VO_5 Segue da propriedade $PI_{\mathbb{R}4}$ de produto interno.

■

Observação 5.3.2 Segue das propriedades VO_4 e VO_5 que se $U=[u_1,u_2,\cdots,u_k]$ é subespaço de V e $v\in V$ é tal que $v\perp u_1,\ \ v\perp u_2,\ \cdots,\ v\perp u_k$, então $v\perp u$ para todo $u\in U$.

5.3.2 Base Ortogonal

Definição 5.3.2 Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$), de dimensão n, com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, dizemos que uma base $\mathscr{B}=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ é uma **base ortogonal** se, e somente se,

$$\langle v_i,v_j\rangle = 0,\ \text{ para todo }\ i\neq j,$$

ou seja, se, e somente se, os elementos de $\mathscr{B}$ são dois a dois ortogonais.

Exemplos 5.3.3 (a) No espaço euclidiano n-dimensional, $\mathbb{R}^n$ munido do produto interno usual, a base canônica $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ é uma base ortogonal, pois $\langle e_i,\ e_j\rangle = 0$ se $i \neq j$.

(b) No espaço vetorial $M_n(\mathbb{R})$ munido do produto interno usual, a base canônica $\mathscr{B} = \{E_{11}, \cdots, E_{1n}, \cdots, E_{n1}, \cdots, E_{nn}\}$ é uma base ortogonal, pois $\langle E_{ij},\ E_{kl}\rangle = 0$ se $i \neq k$ ou $j \neq l$.

(c) No espaço unitário n-dimensional, $\mathbb{C}^n$ munido do produto interno usual, a base canônica $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ é uma base ortogonal, pois $\langle e_i,\ e_j\rangle = 0$ se $i \neq j$.

(d) A base $\mathscr{B} = \{(-1,2),(2,1)\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual, pois $\langle (-1,2),\ (2,1)\rangle = -2+2 = 0$.

(e) A base $\mathscr{B} = \{(1-i,\ i),(i,\ 1+i)\}$ de $\mathbb{C}^2$, como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, é uma base ortogonal, pois como vimos acima que $\big\langle (1-i,\ i),\ (i,\ 1+i)\big\rangle = 0$.

5.3.3 Norma de um Vetor

Definição 5.3.3 Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, a **norma de um vetor** $v \in V$, indicada por $\|v\|$, é o seguinte número real:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

5.3.4 Propriedades da Norma

N_1 $\|v\| \geq 0$, para todo $v \in V$ e $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0_V$ **positividade**.

N_2 $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$, para todo $v \in V$ e todo $\lambda \in \mathbb{K}$ **homogeneidade**.

Verificação:

N_1 Segue da propriedade $PI_{\mathbb{R}2}$ de produto interno.

N_2 Segue da propriedade $PI_{\mathbb{R}4}$ de produto interno.

■

Observações 5.3.4 (a) Segue da definição de norma que

$$\|v\|^2 = \langle v, v\rangle \ \text{ para todo } \ v \ \text{ em } \ V.$$

(b) Um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ com uma norma $\|\cdot\|$ é chamado **espaço vetorial normado** e denotado por $\big(V,\ \|\ \|\big)$.

Exemplos 5.3.5 (a) Em $\mathbb{R}^n$ a norma do produto interno usual é dada por:

$$\|(v_1, \cdots, v_n)\| = \sqrt{\big\langle (v_1, \cdots, v_n),\ (v_1, \cdots, v_n)\big\rangle} = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2},$$

vamos denominá-la de **norma usual**.

(a_1) Em $\mathbb{R}^2$ a norma usual é dada por:

$$\|(v_1,v_2)\| = \sqrt{v_1^2+v_2^2}.$$

Assim, por exemplo,

$$\|(1,0)\| = \sqrt{1^2+0^2} = \sqrt{1} = 1 \text{ e } \|(1,-2)\| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}.$$

(a_2) Em $\mathbb{R}^3$ a norma usual é dada por:

$$\|(v_1,v_2,v_3)\| = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}.$$

Assim, por exemplo, ´

$$\|(1,0,-1)\| = \sqrt{1^2+0^2+(-1)} = \sqrt{2} \text{ e } \|(3,-2,4)\| = \sqrt{3^2+(-2)^2+4^2} = \sqrt{29}.$$

(b) A **norma usual** de $\mathbb{C}^n$ é a norma do produto interno usual dada por:

$$\|(u_1,\cdots,u_n)\| = \sqrt{\langle (u_1,\cdots,u_n),\ (u_1,\cdots,u_n)\rangle} = \sqrt{u_1\cdot\overline{u_1}+\cdots+u_n\cdot\overline{u_n}} = \sqrt{|u_1|^2+\cdots+|u_n|^2}.$$

Corolário 5.3.6 (**Desigualdade de Cauchy-Schwarz**)
Se V é um espaço vetorial com produto interno, então

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|$$

para quaisquer u e v em V.

Demonstração: Vimos no teorema 5.1.4 que $\langle u,v\rangle^2 \leq \langle u,u\rangle\cdot\langle v,v\rangle$, ou seja,

$$\langle u,v\rangle^2 \leq \|u\|^2\cdot\|v\|^2 \Longrightarrow \sqrt{\langle u,v\rangle^2} \leq \sqrt{\|u\|^2\cdot\|v\|^2} = \sqrt{\|u\|^2}\cdot\sqrt{\|v\|^2} \Longrightarrow |\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|.$$

■

Corolário 5.3.7 (**Desigualdade Triangular**)
Se V é um espaço vetorial com produto interno, então

$$\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\| \quad \text{para quaisquer} \quad u \text{ e } v \text{ em } V.$$

Demonstração: Como $\|u+v\| \geq 0$ e $\|u\|+\|v\| \geq 0$, para mostrar que $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$, basta mostrar que:

$$\big(\|u+v\|\big)^2 \leq \big(\|u\|+\|v\|\big)^2.$$

Mas,

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v,u+v\rangle = \langle u,u\rangle+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+\langle v,v\rangle = \|u\|^2+2\langle u,v\rangle+\|v\|^2$$

$$\leq \|u\|^2+2|\langle u,v\rangle|+\|v\|^2 \overset{\text{Cor.5.3.6}}{\leq} \|u\|^2+2\|v\|\cdot\|u\|+\|v\|^2 = \big(\|u\|+\|v\|\big)^2.$$

Portanto, $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$ para quaisquer u e v em V. ■

Observações 5.3.8 (a) Segue da definição de norma que

$$\|v\|^2 = \langle v, v\rangle \text{ para todo } v \text{ em } V.$$

(b) Um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ com uma norma $\|\cdot\|$ é chamado **espaço vetorial normado** e denotado por $\big(V,\ \|\ \|\big)$.

(c) Dados u e v em V um espaço vetorial euclidiano, o número real não negativo $\|u-v\|$ é chamado **distância** de u a v, por exemplo, em $\mathbb{R}^2$ com a norma usual dados $u=(u_1,u_2)$ e $v=(v_1,v_2)$ temos:

$$\|u-v\| = \|(u_1-v_1,\ u_2-v_2)\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2}.$$

Definição 5.3.4 Seja $\big(V,\ \|\ \|\big)$ um espaço vetorial normado, dados u e v vetores não nulos em V, vimos na desigualdade de Cauchy-Schwarz (5.3.6) que $\big|\langle u,v\rangle\big| \leq \|u\|\cdot\|v\|$, consequentemente:

$$-\|u\|\cdot\|v\| \leq \langle u,v\rangle \leq \|u\|\cdot\|v\| \Longleftrightarrow -1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} \leq 1.$$

Logo, existe um único número real θ, com $0 \leq \theta \leq \pi$, tal que

$$\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|},$$

o número θ é chamado **ângulo entre os vetores** u e v.

Teorema 5.3.9 Se V é um espaço vetorial normado, dados u e v em V temos:

(i) u e v são ortogonais se, e somente se, $\|u+v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2$ (**Teorema de Pitágoras**).

(ii) Se u e v não são vetores nulos e θ é o ângulo entre u e v, então:

$$\|u\pm v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2 \pm 2\|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos\theta, \quad \text{(\textbf{Lei dos Cossenos})}.$$

Demonstração:

(i) Sabemos que $\|u+v\|^2 = \langle u+v,\ u+v\rangle = \|u\|^2+2\langle u\ v\rangle+\|v\|^2$.

Logo,

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2 \Longleftrightarrow 2\langle u\ v\rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle u\ v\rangle = 0 \Longleftrightarrow u \text{ e } v \text{ são ortogonais.}$$

(ii) Como $\|u\pm v\|^2 = \langle u\pm v,\ u\pm v\rangle = \|u\|^2 \pm 2\langle u\ v\rangle + \|v\|^2$ e na observação 5.3.8 (e) vimos que $\langle u,v\rangle = \|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos\theta$, segue que:

$$\|u\pm v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2 \pm 2\|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos\theta.$$

■

5.3.5 Base Ortonormal

Definição 5.3.5 Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) com norma $\|\cdot,\cdot\|$, dizemos que um vetor v em V é um **vetor unitário** se, e somente se, $\|v\|=1$.

Exemplos 5.3.10 (a) Em $\mathbb{R}^3$ o vetor $u=(0,1,0)$ e $v=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ são unitários, pois

$$\|(0,1,0)\|=\sqrt{0^2+1^2+0^2}=\sqrt{1}=1 \text{ e}$$

$$\left\|\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\|=\sqrt{\frac{\sqrt{2}^2}{2^2}+0^2+\frac{(-\sqrt{2})^2}{2^2}}=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}}=\sqrt{1}=1.$$

(b) Em $\mathbb{C}^2$ o vetor $u=\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}},\frac{i}{\sqrt{3}}\right)$ é unitário, pois:

$$\left\|\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}},\frac{i}{\sqrt{3}}\right)\right\|=\left\langle\sqrt{\left\langle\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}},\frac{i}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}},\frac{i}{\sqrt{3}}\right)\right\rangle}\right.$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}}\right)+\frac{i}{\sqrt{3}}\frac{-i}{\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=\sqrt{1}=1.$$

Observação 5.3.11 Se v é um vetor não nulo em um espaço normado V, então o vetor $u=\dfrac{v}{\|v\|}$ é um vetor unitário.

De fato

$$\|u\|=\left\|\frac{v}{\|v\|}\right\|=\left|\frac{1}{\|v\|}\right|\cdot\|v\|=\frac{1}{\|v\|}\cdot\|v\|=1.$$

Definição 5.3.6 Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) com norma $\|\cdot,\cdot\|$, dizemos que u e v em V são **vetores ortonormais** se, e somente se, u e v são vetores ortogonais e unitários, ou seja, se e somente se,

$$\|u\|=1,\ \ \|v\|=1 \quad \text{e} \quad \langle u,v\rangle=0.$$

Exemplos 5.3.12 (a) Em $\mathbb{R}^3$ os vetores $u=(0,1,0))$ e $v=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ são ortonormais.

Vimos no exemplo (a) acima que u e v são unitários, como

$$\left\langle(0,1,0),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}+0+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$$

segue que u e v são ortonormais.

(b) Em $\mathbb{C}^2$ os vetores $u=\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}},\frac{i}{\sqrt{3}}\right)$ e $v=\left(\frac{i}{\sqrt{3}},\frac{1-i}{\sqrt{3}}\right)$ são ortonormais.

De fato, no exemplo (b) acima vimos que u é unitário, de maneira análoga mostramos que v também é unitário, e analogamente ao exemplo (c) de vetores ortogonais, portanto u e v são ortonormais.

Definição 5.3.7 Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$), de dimensão n, com norma $\|\cdot,\cdot\|$, dizemos que uma base $\mathscr{B}=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ é uma **base ortonormal** se, e somente se,

(i) Os vetores de $\mathscr{B}$ são todos unitários.

(ii) Quaisquer dois vetores $\mathscr{B}$, distintos entre si, são ortogonais.

Exemplos 5.3.13 (a) No espaço euclidiano n-dimensional, $\mathbb{R}^n$ munido do produto interno usual, a base canônica $\mathscr{B}=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ é uma base ortonormal, pois $\mathscr{B}$ é base ortogonal e $\|e_i\|=1$ para todo $i\in\{1,\cdots,n\}$.

(b) No espaço vetorial $M_n(\mathbb{R})$ munido do produto interno usual, a base canônica $\mathscr{B}=\{E_{11},\cdots,E_{1n},\cdots,E_{n1},\cdots,E_{nn}\}$ é uma base ortonormal, pois $\mathscr{B}$ é base ortogonal e $\|E_{ij}\|=1$ para quaisquer $i,\ j\in\{1,\cdots,n\}$.

(c) Analogamente ao exemplo do item (a), no espaço unitário n-dimensional, $\mathbb{C}^n$ munido do produto interno usual, a base canônica $\mathscr{B}=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{C}^n$.

(d) A base

$$\mathscr{B}=\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ (0,1,0),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ com a norma usual, pois através de cálculos simples podemos ver que os vetores de $\mathscr{B}$ são unitários e dois a dois ortogonais.

(e) A base

$$\mathscr{B}=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}},\frac{i}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{i}{\sqrt{3}},\frac{1-i}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

de $\mathbb{C}^2$ é uma base ortonormal, pois como vimos anteriormente que os vetores de $\mathscr{B}$ são unitários e ortogonais.

Proposição 5.3.14 Sejam V um espaço vetorial normado e $\mathscr{B}=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ uma base de V.

(i) Se $\mathscr{B}$ é uma base ortogonal de V, então para todo $v\in V$ temos:

$$v=\frac{\langle v,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\,v_1+\frac{\langle v,v_2\rangle}{\|v_2\|^2}\,v_2+\cdots+\frac{\langle v,v_n\rangle}{\|v_n\|^2}\,v_n.$$

(ii) Se $\mathscr{B}$ é base ortonormal de V, então para todo $v\in V$ temos:

$$v=\langle v,v_1\rangle\,v_1+\langle v,v_2\rangle\,v_2+\cdots+\langle v,v_n\rangle\,v_n.$$

Demonstração:

(i) Como $\mathscr{B}$ é base V existem escalares $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ tais que:

$$v=a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n.$$

Logo,

$$\langle v,v_1\rangle=\langle a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n,v_1\rangle=a_1\underbrace{\langle v_1,v_1\rangle}_{=\|v_1\|^2}+a_2\underbrace{\langle v_2,v_1\rangle}_{=0}+\cdots+a_n\underbrace{\langle v_n,v_1\rangle}_{=0}=a_1\|v_1\|^2.$$

Como $\|v_1\|\neq 0$ segue que $a_1=\dfrac{\langle v,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}$.

Analogamente mostramos que

$$a_2 = \frac{\langle v, v_2\rangle}{\|v_2\|^2}, \ \cdots, \ a_n = \frac{\langle v, v_n\rangle}{\|v_n\|^2}.$$

Portanto,

$$v = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\, v_1 \ + \ \frac{\langle v, v_2\rangle}{\|v_2\|^2}\, v_2 \ + \ \cdots \ + \ \frac{\langle v, v_n\rangle}{\|v_n\|^2}\, v_n. \tag{5.3.1}$$

(ii) Como consequência da ortogonalidade dos vetores de $\mathscr{B}$ vimos acima em 5.3.1 que:

$$v = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\, v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\|v_2\|^2}\, v_2 + \ \cdots \ + \frac{\langle v, v_n\rangle}{\|v_n\|^2}\, v_n.$$

Já que os vetores de $\mathscr{B}$ são unitários segue ainda que

$$\|v_1\| = \|v_2\| = \cdots = \|v_n\| = 1.$$

Consequentemente em 5.3.1 temos:

$$v = \langle v, v_1\rangle\, v_1 + \langle v, v_2\rangle\, v_2 + \cdots + \langle v, v_n\rangle\, v_n.$$

■

Exemplos 5.3.15 (a) Escreva o vetor $v = (1,2)$ como combinação linear da base ortogonal $\mathscr{B} = \{(1+i,\ i),\ (i,\ 1-i)\}$ de $\mathbb{C}^2$:

$$(1,2) = \frac{\langle (1,2), (1+i,i)\rangle}{\|(1+i,i)\|^2}\, (1+i,i) \ + \ \frac{\langle (1,2), (i,1-i)\rangle}{\|(i,1-i)\|^2}\, (i,1-i).$$

Como

$$\begin{array}{rcccl} & & \langle (1,2), (1+i,i)\rangle & = & 1(1-i)+2(-i) = 1-3i \\ & & \langle (1,2), (i,1-i)\rangle & = & 1(-i)+2(1+i) = 2+i \\ \|(1+i,i)\|^2 & = & \langle (1+i,i), (1+i,i)\rangle & = & (1+i)(1-i)+i(-i) = 3 \\ \|(i,1-i)\|^2 & = & \langle (i,1-i), (i,1-i)\rangle & = & i(-i)+(1-i)(1+i) = 3 \end{array},$$

portanto:

$$(1,2) \ = \ \frac{1-3i}{3}\, (1+i,i) \ + \ \frac{2+i}{3}\, (i,1-i) \ .$$

(b) Escreva o vetor $v = (3,4,-2)$ como combinação linear da base ortogonal $\mathscr{B} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ (0,1,0),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rcl} (3,4,-2) & = & \left\langle (3,4,-2), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ + \ \langle (3,4,-2), (0,1,0)\rangle\, (0,1,0) \\ & & + \left\langle (3,4,-2), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ & = & \frac{5\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ + \ 4\ (0,1,0) \ + \ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{array}.$$

5.4 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Observação 5.4.1 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno, se $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é uma base ortogonal de V, então $\mathscr{B}' = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \cdots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$ é base ortonormal de V.

De fato, da observação 5.3.11 segue que os vetores de $\mathscr{B}'$ são unitários.

Além disso, para $i,\ j \in \{1,2,\cdots,n\}$ quaisquer, com $i \neq j$, temos:

$$\left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|} \right\rangle = \frac{1}{\|v_i\|} \cdot \frac{1}{\|v_j\|} \cdot \underbrace{\langle v_i,\ v_j \rangle}_{=0} = 0.$$

Portanto, a partir de uma base ortogonal podemos obter uma base ortonormal.

No que segue vamos apresentar um procedimento para obter uma base ortogonal a partir de uma base qualquer de V, para isso vamos definir a projeção de um vetor na direção de outro vetor não nulo.

Definição 5.4.1 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ munido de um produto interno, dados que u e v em V, com u vetor não nulo, a **projeção ortogonal** de v na direção de u, indicada por $proj_u u$, é o seguinte vetor:

$$\text{proj}_u v = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2}\, u.$$

Observação 5.4.2 Dados que u e v em V, com u vetor não nulo, os vetores $w = v - \text{proj}_u v$ e u são ortogonais.

De fato,

$$\langle w, u \rangle = \langle v - \text{proj}_u v, u \rangle = \left\langle v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2}\, u, u \right\rangle = \langle v, u \rangle - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} \cdot \langle u, u \rangle = \langle v, u \rangle - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} \cdot \|u\|^2 = 0.$$

Teorema 5.4.3 (**Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt**)
Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ munido de um produto interno e $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ uma base de V, então $\mathscr{B}' = \{w_1, w_2, w_3, \cdots, w_n\}$, com

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1 \\
w_2 &= v_2 - \text{proj}_{w_1} v_2 \\
w_3 &= v_3 - \text{proj}_{w_1} v_3 - \text{proj}_{w_2} v_3 \\
&\vdots \\
w_n &= v_n - \text{proj}_{w_1} v_n - \text{proj}_{w_2} v_n - \cdots - \text{proj}_{w_{n-1}} v_n,
\end{aligned}$$

é uma base ortogonal de V.

Demonstração: Observemos que $\langle w_2, w_1\rangle = \langle v_2 - \text{proj}_{w_1} v_2, w_1\rangle \overset{\text{Obs.5.4.2}}{=} 0$.
Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle w_3, w_1\rangle &= \langle v_3 - \text{proj}_{w_1} v_3 - \text{proj}_{w_2} v_3,\ w_1\rangle \\
&= \left\langle v_3 - \text{proj}_{w_1} v_3 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\, w_2,\ w_1 \right\rangle \\
&= \langle v_3 - \text{proj}_{w_1} v_3, w_1\rangle - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} \cdot \underbrace{\langle w_2, w_1\rangle}_{=0} \overset{\text{Obs.5.4.2}}{=} 0.
\end{aligned}$$

De maneira análoga mostramos que $\langle w_i, w_j\rangle = 0$, se $i \neq j$.

Portanto, $\mathscr{B}' = \{w_1, w_2, w_3, \cdots, w_n\}$ é uma base ortogonal de V. ■

Exemplos 5.4.4 (a) A partir da base $\mathscr{B}$ de $M_2(\mathbb{R})$, com o produto interno usual, dada abaixo:

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

obtenha uma base ortogonal e uma base ortonormal de $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Encontre uma base ortogonal de $\mathbb{C}^3$, como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, que contenha o vetor $v = (1,\ 0,\ 3i)$.

Solução:

(a) Pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt devemos obter $\mathscr{B}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ com:

$$\begin{aligned}
w_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \|w_1\|^2 = 4 \\
w_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle}{\|w_1\|^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \Longrightarrow \|w_2\|^2 = \frac{3}{4} \\
w_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \right\rangle}{\frac{3}{4}} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Longrightarrow \|w_3\|^2 = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$w_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \right\rangle}{\frac{3}{4}} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\rangle}{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \|w_4\|^2 = \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\mathscr{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base ortogonal de $M_2(\mathbb{R})$.

Consequentemente,

$$\mathscr{B}'' = \left\{ \frac{1}{\|w_1\|} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\|w_2\|} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \frac{1}{\|w_3\|} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \frac{1}{\|w_4\|} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \sqrt{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base ortonormal de $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Para obter uma base ortogonal $\mathscr{B} = \{w_1,\ w_2,\ w_3\}$ que contenha o vetor $v = (1,\ 0,\ 3i)$ vamos utilizar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, para isso vamos considerar a base $\mathscr{B}' = \{(1,0,3i),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ do espaço vetorial $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{C}$.

Assim, como $\|(1,0,3i)\|^2 = 10$, segue que:

$$w_1 = v = (1,0,3i)$$

$$w_2 = (0,1,0) - \frac{\overbrace{\langle (0,1,0),\ (1,0,3i) \rangle}^{=0}}{\|(1,0,3i)\|^2}(1,0,3i) = (0,1,0)$$

$$w_3 = (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),\ (1,0,3i) \rangle}{\|(1,0,3i)\|^2}(1,0,3i) - \frac{\overbrace{\langle (0,0,1),\ (0,1,0) \rangle}^{=0}}{\|(0,1,0)\|^2}(0,1,0)$$

$$= (0,0,1) - \frac{3i}{10}(1,0,3i) = \left(\frac{-3i}{10},\ 0,\ \frac{1}{10} \right)$$

Portanto, $\mathscr{B} = \left\{ (1,0,3i),\ (0,1,0),\ \left(\frac{-3i}{10},\ 0,\ \frac{1}{10} \right) \right\}$ é base ortogonal de $\mathbb{C}^3$ que contém v.

5.5 Complemento Ortogonal

Definição 5.5.1 Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ com produto interno e S um subconjunto não vazio de V, o **complemento ortogonal** de S em V, denotado por $S^{\perp}$, é o seguinte subconjunto de V:

$$S^{\perp} = \{v \in V;\ \langle v,u\rangle = 0 \text{ para todo } u \in S\}.$$

Proposição 5.5.1 Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, dimensão n, com produto interno e $S^{\perp}$ o complemento ortogonal de S um subconjunto não vazio de V, então:

(i) $S^{\perp}$ é um subespaço de V.

(ii) Se S é um subespaço de V, então $V = S \oplus S^{\perp}$.

Demonstração:

(i) $0_V \in S^{\perp}$, pois pela propriedade $PI_{\mathbb{R}5}$ de produto interno $\langle 0_V,u\rangle = 0$ para todo $u \in V$, portanto $\langle 0_V,u\rangle = 0$ para todo $u \in S$.

Sejam v_1 e v_2 em $S^{\perp}$, então: $\langle v_1,u\rangle = 0$ e $\langle v_2,u\rangle = 0$ para todo $u \in S$.

Logo, $\langle v_1+v_2,u\rangle \overset{PI_{\mathbb{R}3}}{=} \langle v_1,u\rangle + \langle v_2,u\rangle = 0+0 = 0$ para todo $u \in S$.

Portanto, $v_1+v_2 \in S^{\perp}$.

Sejam $v \in S^{\perp}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então: $\langle v,u\rangle = 0$ para todo $u \in S$.

Logo, $\langle \lambda v,u\rangle \overset{PI_{\mathbb{R}4}}{=} \lambda \cdot \langle v,u\rangle = \lambda \cdot 0 = 0$ para todo $u \in S$.

Portanto, $\lambda v \in S^{\perp}$.

Consequentemente, $S^{\perp}$ é um subespaço de V.

(ii) Seja $\mathscr{B}_S = \{v_1,\ \cdots,\ v_k\}$ uma base ortogonal de S, pelo Teorema do Completamento 4.3.11 podemos estender essa base a uma base de V, dígamos que seja: $\mathscr{B}' = \{v_1,\ \cdots,\ v_k, w_{k+1},\cdots,w_n\}$.

Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt à base $\mathscr{B}'$ obtemos uma base ortogonal $\mathscr{B}$ de V, como os vetores $v_1,\ \cdots,\ v_k$ são dois a dois ortogonais, esses serão os k primeiros vetores de $\mathscr{B}$, ou seja, $\mathscr{B} = \{v_1,\ \cdots,\ v_k, v_{k+1},\cdots,v_n\}$.

Como $S = [v_1,\cdots,v_k]$ e $\mathscr{B}$ é base ortogonal de V, segue que $[v_{k+1},\cdots,v_n] \subset S^{\perp}$.

Além disso, dado $u \in S^{\perp}$, então $\langle u,v\rangle = 0$ para todo $v \in S$, e portanto, $\langle u,v_1\rangle = \cdots = \langle u,v_k\rangle = 0$ e pela Proposição 5.3.14 (i) temos:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\langle u,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 + \cdots + \frac{\langle v,v_k\rangle}{\|v_k\|^2}v_k + \frac{\langle v,v_{k+1}\rangle}{\|v_{k+1}\|^2}v_{k+1} + \cdots + \frac{\langle v,v_n\rangle}{\|v_n\|^2}v_n \\ &= \frac{\langle v,v_{k+1}\rangle}{\|v_{k+1}\|^2}v_{k+1} + \cdots + \frac{\langle v,v_n\rangle}{\|v_n\|^2}v_n. \end{aligned}$$

Portanto, $u \in [v_{k+1},\cdots,v_n]$, como $u \in S^{\perp}$ é arbitrário segue que $S^{\perp} = [v_{k+1},\cdots,v_n]$.

Como $\{v_{k+1},\cdots,v_n\}$ é subconjunto L.I. de V segue ainda que $\mathscr{B}_{S^{\perp}} = \{v_{k+1},\cdots,v_n\}$ é base de $S^{\perp}$.

Logo,

$$V = [v_1,\cdots,v_k] \oplus [v_{k+1},\cdots,v_n] = S \oplus S^{\perp}.$$

■

Exemplos 5.5.2 (a) Seja $W=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4;\ x-y-w=0 \ \text{ e } \ 2y-z+w=0\}$ subespaço de $\mathbb{R}^4$, determine uma base para W e uma base para $W^\perp$.

(b) Em $\mathscr{C}([-1,1])$, conjunto das funções contínuas de $[-1,1]$ em $\mathbb{R}$, consideremos o produto interno:

$$\begin{array}{rccl}\langle\cdot,\cdot\rangle: & \mathscr{C}([-1,1])\times\mathscr{C}([-1,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (f,g) & \longmapsto & \langle f,g\rangle=\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)\,dx.\end{array}$$

Determine o complemento ortogonal de $W=\big\{f\in\mathscr{C}([-1,1]);\ f \text{ é ímpar}\big\}$.

Solução:

(a) Observemos $(x,y,z,w)\in W \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & w & = & 0\\ & & 2y & - z - & w & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y+w\\ z & = & 2y+w\end{array}\right.$

$$\iff (x,y,z,w)=(y+w,\ y,\ 2y+w,\ w)=y(1,1,2,0)+w(1,0,1,1).$$

Portanto, $\mathscr{B}_1=\big\{(1,0,1,1),\ (1,1,2,0)\big\}$ é base de W.

Para obter uma base ortogonal para W a partir da base $\mathscr{B}_1$ vamos utilizar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, ou seja, $\mathscr{B}_1'=\big\{w_1,\ w_2\big\}$ com:

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & (1,0,1,1)\\ w_2 & = & (1,1,2,0)-\dfrac{\big\langle(1,0,1,1),\ (1,1,2,0)\big\rangle}{\big\|(1,0,1,1)\big\|^2}(1,0,1,1)\\ & = & (1,1,2,0)-\dfrac{3}{3}(1,0,1,1)=(1,1,2,0)-(1,0,1,1)=(0,1,1,-1).\end{array}$$

Portanto, $\mathscr{B}_1'=\big\{(1,0,1,1),\ (0,1,1,-1)\big\}$ é base ortogonal de W.

Logo $\mathscr{B}'=\big\{(1,0,1,1),\ (0,1,1,-1),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\big\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ obtida pelo completamento de $\mathscr{B}_1'$.

Consequentemente,

$$\begin{array}{rcl} w_3 & = & (0,0,1,0)-\dfrac{\big\langle(1,0,1,1),\ (0,0,1,0)\big\rangle}{\big\|(1,0,1,1)\big\|^2}(1,0,1,1)-\dfrac{\big\langle(0,1,1,-1),\ (0,0,1,0)\big\rangle}{\big\|(0,1,1,-1)\big\|^2}(0,1,1,-1)\\ & = & (0,0,1,0)-\dfrac{1}{3}(1,0,1,1)-\dfrac{1}{3}(0,1,1,-1)=\left(-\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ 0\right)\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} w_4 & = & (0,0,0,1)-\dfrac{\big\langle(1,0,1,1),\ (0,0,0,1)\big\rangle}{\big\|(1,0,1,1)\big\|^2}(1,0,1,1)-\dfrac{\big\langle(0,1,1,-1),\ (0,0,0,1)\big\rangle}{\big\|(0,1,1,-1)\big\|^2}(0,1,1,-1)\\ & & \overset{=0}{\overbrace{-\dfrac{\left\langle\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right),\ (0,0,0,1)\right\rangle}{\left\|\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right)\right\|^2}\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right)}}\\ & = & (0,0,0,1)-\dfrac{1}{3}(1,0,1,1)+\dfrac{1}{3}(0,1,1,-1)=\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ 0,\ \dfrac{1}{3}\right).\end{array}$$

Portanto,

$$\mathscr{B} = \left\{(1,0,1,1),\ (0,1,1,-1),\ \left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right),\ \left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{3}\right)\right\}$$

é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$,

$$\mathscr{B}_W = \big\{(1,0,1,1),\ (0,1,1,-1)\big\} \quad \text{é base de} \quad W$$

e

$$\mathscr{B}_{W^\perp} = \big\{(-1,-1,1,0),\ (-1,1,0,1)\big\} \quad \text{é base de} \quad W^\perp.$$

(b) Observemos que $g \in W^\perp$ se, e somente se, $\langle f, g\rangle = 0$, para todo $f \in W$, mas,

$$\langle f,g\rangle = 0 \Longleftrightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)\,dx = 0 \Longleftrightarrow \int_{-1}^{0} f(x)\cdot g(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\cdot g(x)\,dx = 0.$$

Fazendo a substituição: $\left\{\begin{array}{rcrcl} u & = & -x & \Longrightarrow & du = -\,dx \Longleftrightarrow dx = -\,du \\ x & = & 0 & \Longrightarrow & u = 0 \\ x & = & -1 & \Longrightarrow & u = 1, \end{array}\right.$ logo temos:

$$\int_{1}^{0} -f(-u)\cdot g(-u)\,du + \int_{0}^{1} f(x)\cdot g(x)\,dx = 0 \overset{f \text{ é ímpar}}{\Longrightarrow} -\int_{0}^{1} f(u)\cdot g(-u)\,du + \int_{0}^{1} f(x)\cdot g(x)\,dx = 0.$$

Portanto, como u e x são variáveis mudas, podemos substituí-las por t, outra variável muda, e assim temos:

$$-\int_{0}^{1} f(t)\cdot g(-t)\,dt + \int_{0}^{1} f(t)\cdot g(t)\,dt = 0 \Longleftrightarrow \int_{0}^{1} f(t)\cdot \big(g(t) - g(-t)\big)\,dt = 0,$$

para toda função $f \in W$, consequentemente devemos ter $g(t) - g(-t) = 0$ para todo $t \in [-1,1]$.

Portanto, $g(-t) = g(t)$ para todo $t \in [-1,1]$, ou seja, g é função par.

Daí que

$$W^\perp = \big\{g \in \mathscr{C}([-1,1]);\ g \text{ é par}\big\}.$$

III Transformações Lineares

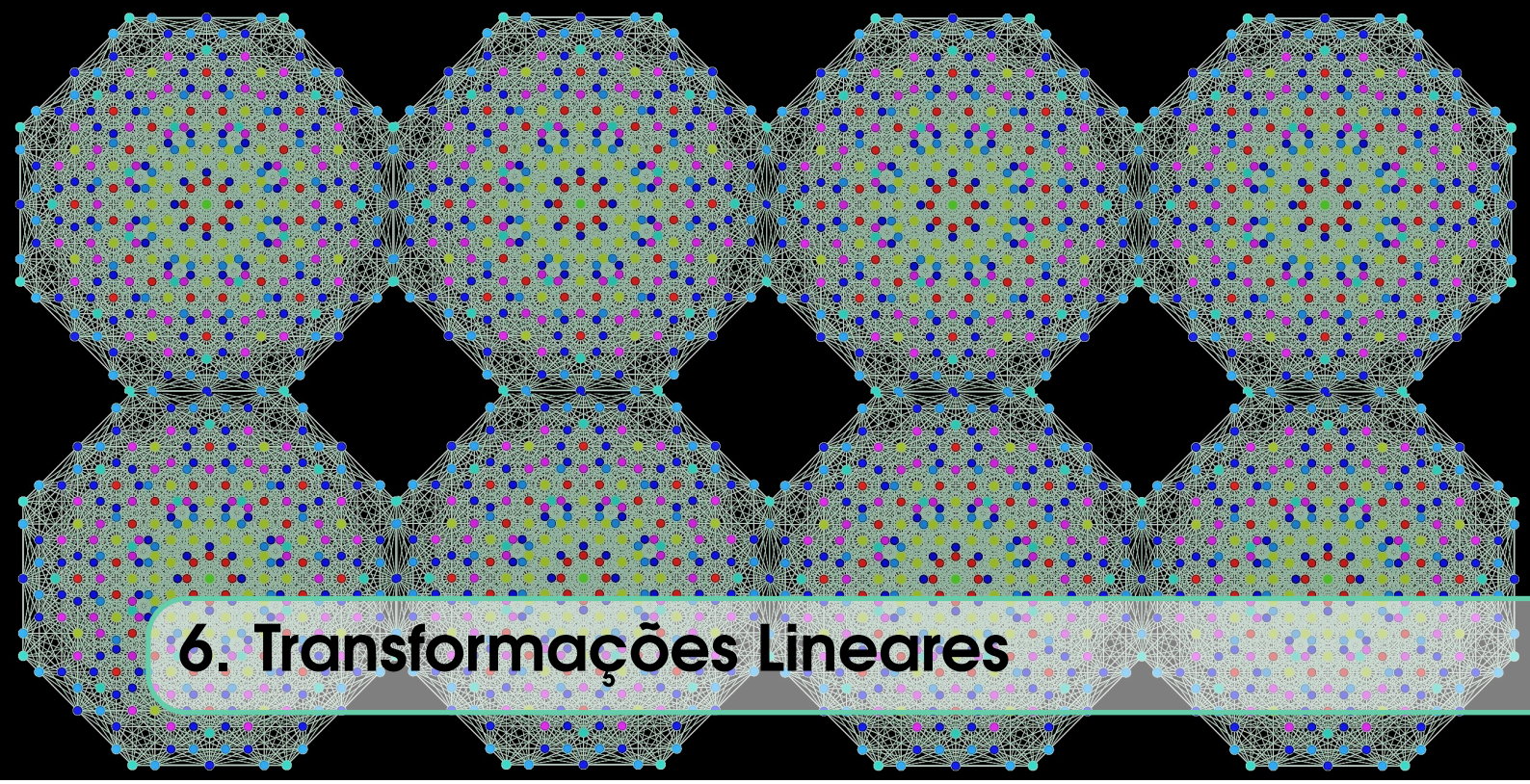
6 Transformações Lineares 165

6.1 Transformações Lineares
6.2 Matriz de uma Transformação Linear
6.3 Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear
6.4 Transformações Lineares Injetoras e Sobrejetoras
6.5 Inversa de uma Transformação Linear
6.6 O Espaço Vetorial $\mathscr{L}(V,W)$

7 Diagonalização de Operadores Lineares 203

7.1 Autovalor e Autovetor de um Operador Linear
7.2 Polinômio Característico de um Operador Linear
7.3 Diagonalização de Operadores Lineares
7.4 Operadores Auto-Adjuntos

Bibliografia 238



6. Transformações Lineares

Dados A e B conjuntos não vazios uma aplicação de A em B é uma relação biunívoca que a cada elemento a em A associa um único elemento em B.

Uma transformação linear é uma aplicação entre dois espaços vetoriais que preserva linearidade, por exemplo as rotações e as reflexões do plano no plano são lineares.

6.1 Transformações Lineares

Definição 6.1.1 Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, uma aplicação $T : V \longrightarrow W$ é uma **transformação linear** se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:

(i) Para quaisquer u e v em V tivermos $T(u+v) = T(u)+T(v)$.

(ii) Para todo v em V e todo λ em $\mathbb{K}$ tivermos $T(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot T(v)$.

Exemplos 6.1.1 (a) **Reflexões no Plano**

(a_1) Reflexão em torno do eixo x:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (x,-y) \end{array}.$$

(a_2) Reflexão em torno do eixo x:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (-x,-y) \end{array}.$$

(a_3) Reflexão em torno do eixo y:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (-x,y) \end{array}.$$

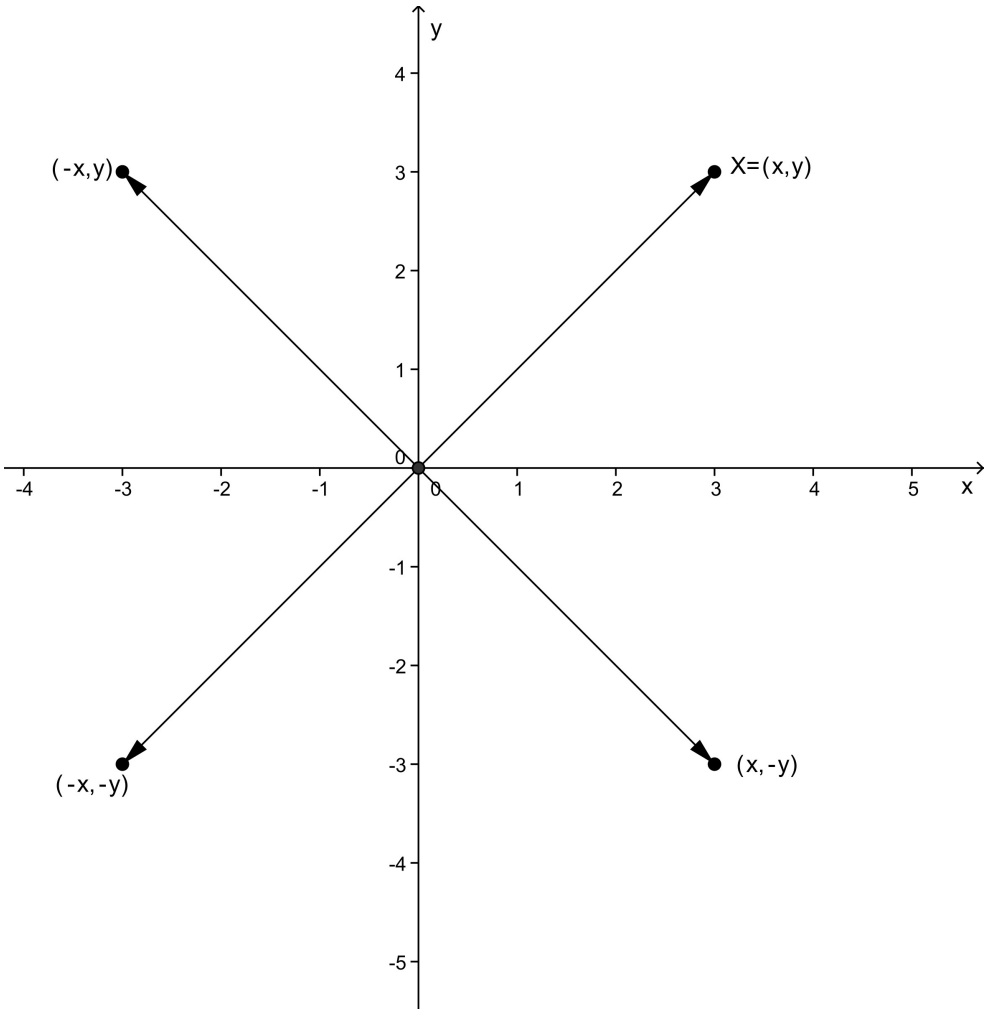


Figura 6.1.1: *Ponto X e as imagens das reflexões pelos eixos x e y e pela origem*

(b) **Rotações no Plano**

(b_1) Rotação de um ângulo θ:

$$\begin{array}{rccl} R_\theta: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & R_\theta(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ & & & = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta,\ x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta). \end{array}$$

(b_2) Rotação de $\dfrac{\pi}{2}$:

$$\begin{array}{rccl} R_{\frac{\pi}{2}}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & R_{\frac{\pi}{2}}(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (-y,\ x)\ . \end{array}$$

(b_3) Rotação de π:

$$\begin{array}{rccl} R_\pi: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & R_\pi(x,y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (-x,\ -y)\ . \end{array}$$

A linearidade segue das propriedades de produto de matrizes.

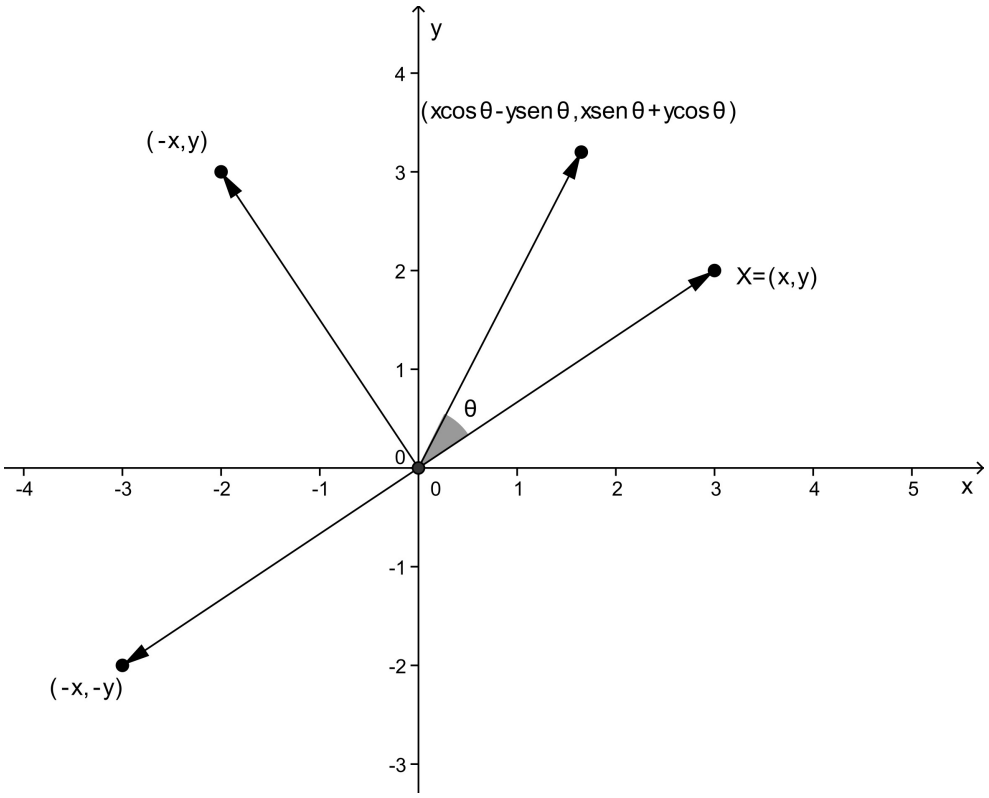


Figura 6.1.2: *Ponto X e as imagens das rotações de* θ, $\frac{\pi}{2}$ *e* π

(c) As aplicações do tipo:

$$T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (ax,\ by) \end{array}, \quad \text{com } a \text{ e } b \text{ números reais são lineares.}$$

De fato:

(i) Para quaisquer (x_1,y_1) e (x_2,y_2) em $\mathbb{R}^2$ temos:

$$\begin{aligned} T\big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big) &= T(x_1+x_2,y_1+y_2) = \big(a(x_1+x_2),b(y_1+y_2)\big) \\ &= (ax_1+ax_2,by_1+by_2) = (ax_1,by_1)+(ax_2,by_2) \\ &= T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2). \end{aligned}$$

(ii) Para todo (x,y) em $\mathbb{R}^2$ e todo λ em $\mathbb{R}$ temos:

$$T\big(\lambda(x,y)\big) = T(\lambda x,\lambda y) = \big(a(\lambda x),b(\lambda y)\big) = (a\lambda x,b\lambda y) = \lambda(ax,by) = \lambda T(x,y).$$

Logo, as reflexões do exemplo (a) são lineares, no item (a_1) $a=1$ e $b=-1$; no item (a_2) $a=b=-1$ e no item (a_3) $a=-1$ e $b=1$.

(d) As translações não triviais do plano:

$$\begin{array}{rccc} T_{(a,b)}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T_{(a,b)}(x,y) = (x,y)+(a,b) \end{array}, \quad \text{com } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0$$

não são lineares.

De fato, por exemplo:

$$T(1,0) = (1,0)+(a,b) = (1+a,b) \quad \text{e} \quad T(0,1) = (0,1)+(a,b) = (a,1+b),$$

assim $T(1,0)+T(0,1) = (1+a,b)+(a,1+b) = (1+2a,1+2b)$.

Por outro lado, $T\big((1,0)+(0,1)\big) = T(1,1) = (1,1)+(a,b) = (1+a,1+b)$.

Logo, $T(1,0)+T(0,1) = T(1,1) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1+2a = 1+a \\ 1+2b = \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2a = a \\ 2b = b \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array} \right.$, mas por hipótese temos $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Portanto, $T_{(a,b)}$ não é linear.

(e) A aplicação derivada de polinômios é linear:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R}) \\ & p(t) & \longmapsto & T\big(p(t)\big) = p'(t) \end{array} \quad \text{é linear.}$$

De fato:

(i) Para quaisquer $p(t)$ e $q(t)$ em $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ temos:

$$T\big(p(t)+q(t)\big) = T\big((p+q)(t)\big) = (p+q)'(t) \overset{(1)}{=} p'(t)+q'(t) = T\big(p(t)\big)+T\big(q(t)\big).$$

(1) $\dfrac{d}{dt}\big(f(t)+g(t)\big) = \dfrac{d}{dt}\big(f(t)\big)+\dfrac{d}{dt}\big(g(t)\big) = f'(t)+g'(t)$, propriedade da derivada da soma de funções.

(ii) Para todo $p(t)$ em $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ e todo λ em $\mathbb{R}$ temos:

$$T\big(\lambda p(t)\big) = T\big((\lambda p)(t)\big) \overset{(2)}{=} \lambda (p)'(t) = \lambda T\big(p(t)\big).$$

(2) $\dfrac{d}{dt}\big(a \cdot f(t)\big) = a \cdot \dfrac{d}{dt}\big(f(t)\big) = a \cdot f'(t)$, propriedade da derivada do produto de uma função por uma constante.

(f) Seja $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ uma matriz $m \times n$, a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} T_A: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & (x_1,x_2,\cdots,x_n) & \longmapsto & T_A(x_1,x_2,\cdots,x_n) = A_{m\times n} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{array},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} T_A(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= (a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n,\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n,\cdots,a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n) \end{aligned}$$

é uma transformação linear.

De fato, segue das propriedades $M_3\ (a)$ e M_4 de produto de matrizes.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ então temos:

$$\begin{aligned} T_A: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto T_A(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= (x+3y-z,\ 2y+z). \end{aligned}$$

Observação 6.1.2 Na definição de transformação linear $T: V \longrightarrow W$ os espaço vetoriais V e W devem ser sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, pois caso contrário a segunda condição da definição não funcionaria.

6.1.1 Propriedades de Transformações Lineares

Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T: V \longrightarrow W$ uma transformação linear, então valem:

TL_1 $T(O_V) = 0_W$.

TL_2 $T(-v) = -T(v)$, para todo $v \in V$.

TL_3 $T(v-u) = T(v) - T(u)$, para quaisquer $v,\ u \in V$.

TL_4 Se U é subespaço de V, então $T(U)$ é subespaço de W.

TL_5 Dados $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_k$ em V e escalares $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$, então:

$$T(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \cdots + a_kT(v_k).$$

Verificação:

TL_1 De fato, podemos escrever $0_V = v + (-v)$ para algum $v \in V$, assim,

$$T(0_V) = T\big(v+(-v)\big) \overset{(i)}{=} T(v) + T(-v) \overset{(ii)}{=} T(v) - T(v) = 0_W.$$

TL_2 De fato, dado $v \in V$, então,

$$T(v) + \big(-T(v)\big) = 0_W \overset{TL_1}{=} T(0_V) = T\big(v+(-v)\big) \overset{(i)}{=} T(v) + T(-v).$$

Logo, $\big(-T(v)\big) = T(-v) \Longleftrightarrow -T(v) = T(-v)$.

TL_3 De fato,

$$T(v-u) = T\big(v+(-u)\big) \overset{(i)}{=} T(v) + T(-u) \overset{TL_2}{=} T(v) - T(u).$$

TL_4 Lembremos que $T(U) = \{w \in W;\ w = T(u) \text{ para algum } u \in U\}$.

Como $0_V \in U$, pois U é subespaço de V, segue que $0_W = T(0_V) \in T(U)$, portanto $T(U) \neq \emptyset$.

Sejam $w_1\ w_2 \in T(U)$, então existem $u_1,\ u_2 \in U$ tais que $w_1 = T(u_1)$ e $w_2 = T(u_2)$.

Logo,

$$w_1 + w_2 = T(u_1) + T(u_2) \overset{(i)}{=} T(\underbrace{u_1+u_2}_{\in U}) \in T(U).$$

Sejam $w \in T(U)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então existe $u \in U$ tais que $w = T(u)$.

Logo,

$$\lambda \cdot w = \lambda \cdot T(u) \overset{(ii)}{=} T(\underbrace{\lambda \cdot u}_{\in U}) \in T(U).$$

Portanto, $T(U)$ é subespaço de W.

TL_5 Segue das condições (i) e (ii) da definição de transformação linear.

■

Observação 6.1.3 Se $T : V \longrightarrow V$ é uma transformação linear, com $Dom(T) = CD(T)$, dizemos que T é um **operador linear**.

Proposição 6.1.4 Sejam V, W e U espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, se $T : V \longrightarrow W$ e $S : W \longrightarrow U$ são transformações lineares, então a composição $S \circ T : V \longrightarrow U$ também é uma transformação linear.

Demonstração:

(i) Sejam u e v em V, então:

$$S \circ T(u+v) = S\big(T(u+v)\big) \overset{T \text{ é linear}}{=} S\big(T(u)+T(v)\big)$$

$$\overset{S \text{ é linear}}{=} S\big(T(u)\big) + S\big(T(v)\big) = S \circ T(u) + S \circ T(v).$$

(ii) Sejam v em V e λ em $\mathbb{K}$, então:

$$S \circ T(\lambda v) = S\big(T(\lambda v)\big) \overset{T \text{ é linear}}{=} S\big(\lambda T(v)\big) \overset{S \text{ é linear}}{=} \lambda S\big(T(v)\big) = \lambda S \circ T(v).$$

De (i) e (ii) segue que $S \circ T$ é linear. ■

6.2 Matriz de uma Transformação Linear

No último exemplo de transformações lineares vimos que toda matriz define uma transformação linear. Reciprocamente, se V e W são espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, ambos de dimensão finita, dada uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$, considerando $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ base de V e $\mathscr{B}' = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ base de W podemos associar a T uma matriz em relação às bases $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$.

De fato, para todo $v \in V$ podemos escrever

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n, \quad \text{com} \quad \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Por outro lado, como $T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n) \in W$ também podemos escrever:

$$\begin{array}{rcccccccc} T(v_1) & = & a_{11} \cdot w_1 & + & a_{21} \cdot w_2 & + & \cdots & + & a_{m1} \cdot w_m \\ T(v_2) & = & a_{12} \cdot w_1 & + & a_{22} \cdot w_2 & + & \cdots & + & a_{m2} \cdot w_m \\ & \vdots & & & & & & & \\ T(v_n) & = & a_{1n} \cdot w_1 & + & a_{2n} \cdot w_2 & + & \cdots & + & a_{mn} \cdot w_m \end{array} . \tag{6.2.1}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
T(v) &= T\big(\alpha_1\cdot v_1 + \alpha_2\cdot v_2 + \cdots + \alpha_n\cdot v_n\big)\\
&= \alpha_1\cdot T(v_1) + \alpha_2\cdot T(v_2) + \cdots + \alpha_n\cdot T(v_n)\\
&= \alpha_1\cdot\big(a_{11}\cdot w_1 + a_{21}\cdot w_2 + \cdots + a_{m1}\cdot w_m\big) + \alpha_2\cdot\big(a_{12}\cdot w_1 + a_{22}\cdot w_2 + \cdots + a_{m2}\cdot w_m\big)\\
&\quad + \cdots + \alpha_n\cdot\big(a_{1n}\cdot w_1 + a_{2n}\cdot w_2 + \cdots + a_{mn}\cdot w_m\big)\\
&= (\alpha_1\cdot a_{11} + \alpha_2\cdot a_{12} + \cdots + \alpha_n\cdot a_{1n})\cdot w_1 + (\alpha_1\cdot a_{21} + \alpha_2\cdot a_{22} + \cdots + \alpha_n\cdot a_{2n})\cdot w_2\\
&\quad + \cdots + (\alpha_1\cdot a_{m1} + \alpha_2\cdot a_{m2} + \cdots + \alpha_n\cdot a_{mn})\cdot w_m
\end{aligned}$$

Portanto, matricialmente temos:

$$\big[T(v)\big] = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_m \end{bmatrix}_{1\times m}\cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}}_{A}_{m\times n}\cdot \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}_{n\times 1}. \tag{6.2.2}$$

Definição 6.2.1 Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, de dimensões n e m, respectivamente. Dadas $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ base de V, $\mathscr{B}' = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ base de W e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear a matriz A dada em **6.2.2** é chamada **matriz da transformação linear** T relação às bases $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$.

Notação: $[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}$, no caso em que $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ são bases canônicas indicamos por $[T]$.

$$[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{matrix} T(v_1) & T(v_2) & \cdots & T(v_n)\\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{matrix}\\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{ll} \leftarrow & \text{coordenadas do 1º vetor de } \mathscr{B}'\\ \leftarrow & \text{coordenadas do 2º vetor de } \mathscr{B}'\\ & \vdots\\ \leftarrow & \text{coordenadas do mº vetor de } \mathscr{B}' \end{array}.$$

Observações 6.2.1 (a) Se $T : V \longrightarrow V$ é um operador linear e consideramos a base $\mathscr{B}$ no domínio e no contra-domínio de T, então indicamos a matriz correspondente por $[T]_{\mathscr{B}}$.

(b) No que segue vamos indicar:

- $e_1, \cdots, e_n$ os respectivos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$;
- $E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{1n}, \cdots, E_{m1}, E_{m2}, \cdots, E_{mn}$ os respectivos vetores da base canônica de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$;
- $v_1, \cdots, v_n$ os respectivos vetores de uma base qualquer.

Exemplos 6.2.2 (a) Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$T(x,y,z) = (x-y+2z,\ 3x+4z).$$

Determine a matriz de T em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Solução:

A base canônica de $\mathbb{R}^3$ é $\mathscr{B} = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$, enquanto que a de $\mathbb{R}^2$ é $\mathscr{B}' = \{(1,0),\ (0,1)\}$.
Logo,

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,3) &&= 1(1,0)+3(0,1) \\ T(0,1,0) &= (-1,0) &&= -1(1,0)+0(0,1)\ . \\ T(0,0,1) &= (2,4) &&= 2(1,0)+4(0,1) \end{aligned}$$

Portanto, a matriz de T em relação às bases canônicas é:

$$[T] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{ coordenada do 1º vetor de } \mathscr{B}' \\ \leftarrow \text{ coordenada do 2º vetor de } \mathscr{B}' \end{array}.$$

(b) Seja a transformação linear $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$T\left(\left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right]\right) = (a_{11}+a_{12}+a_{21},\ a_{12}-a_{21}+a_{22},\ 2a_{21}-a_{22}).$$

Determine a matriz de T em relação às bases canônicas de $M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$.

Solução:

A base canônica de $M_2(\mathbb{R})$ é: $\mathscr{B} = \left\{\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]\right\}$ e a de $\mathbb{R}^3$ é $\mathscr{B}' = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$.

Assim temos:

$$T\left(\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]\right) = (1,0,0) = 1(1,0,0)+0(0,1,0)+0(0,0,1),$$

$$T\left(\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right]\right) = (1,1,0) = 1(1,0,0)+1(0,1,0)+0(0,0,1),$$

$$T\left(\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right]\right) = (1,-1,2) = 1(1,0,0)-1(0,1,0)+2(0,0,1),$$

$$T\left(\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]\right) = (0,0,-1) = 0(1,0,0)+0(0,1,0)-1(0,0,1).$$

Portanto, a matriz de T em relação às bases canônicas é:

$$[T] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T(E_{11}) & T(E_{12}) & T(E_{21}) & T(E_{22}) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{ coordenada do 1º vetor de } \mathscr{B}' \\ \leftarrow \text{ coordenada do 2º vetor de } \mathscr{B}' \\ \leftarrow \text{ coordenada do 3º vetor de } \mathscr{B}' \end{array}.$$

(c) Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ dada por:

$$T(x,y) \;=\; 2x \;+\; y\,t \;+\; 3y\,t^2 \;-\; x\,t^3.$$

Determine a matriz de T em relação às bases canônicas de $M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$.

Solução:

A base canônica de $\mathbb{R}^2$ é $\mathscr{B} = \big\{(1,0),\ (0,1)\big\}$, enquanto que a de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ é $\mathscr{B}' = \{1,\ t,\ t^2,\ t^3\}$.

Logo,

$$T(1,0) = 2 - t^3 \quad \text{e} \quad T(0,1) = t + 3t^2.$$

Portanto, a matriz de T em relação às bases canônicas é:

$$[T] = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T(e_1) & T(e_2) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{ coeficiente de grau 0} \\ \leftarrow \text{ coeficiente de grau 1} \\ \leftarrow \text{ coeficiente de grau 2} \\ \leftarrow \text{ coeficiente de grau 3} \end{array}.$$

(d) Seja a transformação linear $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ dada por:

$$T\left(\left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right]\right) \;=\; 2a_{11} + (a_{11} - a_{12})t + (2a_1 1 + a_{12} - 3a_{21})t^2 + (a_{11} - a_{21} + 2a_{22})t^3.$$

Determine a matriz de T em relação às bases

$$\mathscr{B} = \left\{\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{array}\right]\right\} \quad \text{de} \quad M_2(\mathbb{R})$$

e $\mathscr{B}' = \{1,\ 1+t,\ 1+t^2,\ t+t^3\}$ de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

Solução:

Observemos que:

$$T\left(\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right]\right) = 2 + 3t^2 + t^3 = (-1)\times(1+t) + 3\times(1+t^2) + 1\times(t+t^3),$$

$$T\left(\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]\right) = 2 + t - t^2 = 2\times 1 + 1\times(1+t) + (-1)\times(1+t^2),$$

$$T\left(\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]\right) = -t - 2t^2 - t^3 = 2\times 1 + (-2)\times(1+t^2) + (-1)\times(t+t^3),$$

$$T\left(\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{array}\right]\right) = -3t^2 - 3t^3 = 3\times(1+t) + (-3)\times(1+t^2) + (-3)\times(t+t^3).$$

Portanto, a matriz de T em relação às bases canônicas é:

$$[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T(v_1) & T(v_2) & T(v_3) & T(v_4) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{ coordenada do 1º vetor de } \mathscr{B}' \\ \leftarrow \text{ coordenada do 2º vetor de } \mathscr{B}' \\ \leftarrow \text{ coordenada do 3º vetor de } \mathscr{B}' \\ \leftarrow \text{ coordenada do 4º vetor de } \mathscr{B}' \end{array},$$

com $v_1 = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$, $v_2 = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$, $v_3 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]$, $v_4 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{array}\right]$.

Teorema 6.2.3 Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, ambos de dimensão finita e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Se $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é base de V e $\mathscr{B}' = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ é base de W, então

$$\big[T(v)\big]_{\mathscr{B}'} = [T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} \cdot [v]_{\mathscr{B}} \qquad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Demonstração: Dado $v \in V$ existem escalares $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ em $\mathbb{K}$ tais que

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n.$$

Logo, na **expressão 6.2.2**, preliminar à **Definição 6.2.1**, temos:

$$T(v) = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_m \end{bmatrix}_{1\times m} \cdot [T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad \Longrightarrow \quad \big[T(v)\big]_{\mathscr{B}'} = [T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Como $[v]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, segue que:

$$\big[T(v)\big]_{\mathscr{B}'} = [T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} \cdot [v]_{\mathscr{B}} \qquad \text{para todo} \quad v \in V.$$

■

Observação 6.2.4 Sejam V espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, de dimensão finita, e $I_V : V \longrightarrow V$ operador identidade, dado por $I_V(v) = v$ para todo $v \in V$. Se $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}_1$ são bases de V, então $[I_V]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}_1} = M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}_1}$, a matriz mudança de base de $\mathscr{B}$ para $\mathscr{B}_1$.

Teorema 6.2.5 Sejam V, W e U espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, com $\dim V = n$, $\dim W = k$ e $\dim U = m$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ e $\mathscr{B}''$ bases de V, W e U, respectivamente. Se

$$T : V \longrightarrow W \quad \text{e} \quad S : W \longrightarrow U \quad \text{são transformações lineares,}$$

então $\underbrace{[S \circ T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}''}}_{m\times n}$, a matriz da composição $S \circ T$ em relação às bases $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}''$, satisfaz:

$$[S \circ T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}''} = \underbrace{[S]^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}''}}_{m\times k} \cdot \underbrace{[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}}_{k\times n}.$$

Demonstração: Pelo **Teorema 6.2.3**, para todo $v \in V$ temos:

$$\big[S \circ T(v)\big]_{\mathscr{B}''} \quad = \quad [S \circ T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}''} \cdot [v]_{\mathscr{B}}.$$

Por outro lado, pela definição de composição segue que:

$$\big[S \circ T(v)\big]_{\mathscr{B}''} = \big[S\big(T(v)\big)\big]_{\mathscr{B}''} \overset{\text{Teo. 6.2.3}}{=} [S]^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}''} \cdot \big[T(v)\big]_{\mathscr{B}'} \overset{\text{Teo. 6.2.3}}{=} [S]^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}''} \cdot [T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} \cdot [v]_{\mathscr{B}}.$$

Logo, para todo $v \in V$ temos:

$$[S \circ T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}''} \cdot [v]_{\mathscr{B}} = [S]^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}''} \cdot [T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} \cdot [v]_{\mathscr{B}}.$$

Consequentemente, pelo **Corolário 1.1.30** segue que:

$$[S\circ T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}''} \;=\; [S]^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}''}\cdot[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}.$$

■

Teorema 6.2.6 Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ de dimensões finita, $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}_1$ bases de V, $\mathscr{B}'$ e $\mathscr{B}'_1$ bases de W e $T:V\longrightarrow W$ transformação linear, então:

$$[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} \;=\; M^{\mathscr{B}'_1}_{\mathscr{B}'}\cdot[T]^{\mathscr{B}_1}_{\mathscr{B}'_1}\cdot M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}_1},$$

com $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}_1}$ e $M^{\mathscr{B}'_1}_{\mathscr{B}'}$ as matrizes mudanças de base de $\mathscr{B}$ para $\mathscr{B}_1$ e de $\mathscr{B}'_1$ para $\mathscr{B}'$, respectivamente.

Demonstração: Do **Teorema 4.5.3** e do **Teorema 6.2.1**, para todo $v\in V$, seguem que:

(i) $[v]_{\mathscr{B}_1} \;=\; M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}_1}\cdot[v]_{\mathscr{B}}$

(ii) $\big[T(v)\big]_{\mathscr{B}'_1} \;=\; M^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}'_1}\cdot\big[T(v)\big]_{\mathscr{B}'}$

(iii) $\big[T(v)\big]_{\mathscr{B}'} \;=\; [T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}\cdot[v]_{\mathscr{B}}$

(iv) $\big[T(v)\big]_{\mathscr{B}'_1} \;=\; [T]^{\mathscr{B}_1}_{\mathscr{B}'_1}\cdot[v]_{\mathscr{B}_1}\;.$

Logo, igualando (ii) e (iv) temos:

$$M^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}'_1}\cdot\big[T(v)\big]_{\mathscr{B}'} \;=\; [T]^{\mathscr{B}_1}_{\mathscr{B}'_1}\cdot[v]_{\mathscr{B}_1}\;.$$

Na igualdade acima substituindo (iii) e (i) obtemos:

$$M^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}'_1}\cdot[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}\cdot[v]_{\mathscr{B}} \;=\; [T]^{\mathscr{B}_1}_{\mathscr{B}'_1}\cdot M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}_1}\cdot[v]_{\mathscr{B}}\;,$$

para todo $v\in V$.

Como a matriz $M^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}'_1}$ é invertível com inversa $M^{\mathscr{B}'_1}_{\mathscr{B}'}$, multiplicando, à esquerda, a igualdade acima por $M^{\mathscr{B}'_1}_{\mathscr{B}'}$ temos:

$$[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}\cdot[v]_{\mathscr{B}} \;=\; M^{\mathscr{B}'_1}_{\mathscr{B}'}\cdot[T]^{\mathscr{B}_1}_{\mathscr{B}'_1}\cdot M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}_1}\cdot[v]_{\mathscr{B}}\;,$$

para todo $v\in V$.

Consequentemente, $[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} \;=\; M^{\mathscr{B}'_1}_{\mathscr{B}'}\cdot[T]^{\mathscr{B}_1}_{\mathscr{B}'_1}\cdot M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}_1}\;.$ ■

Corolário 6.2.7 Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ de dimensão finita, $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}_1$ bases de V e $T:V\longrightarrow V$ um operador linear, então:

$$[T]_{\mathscr{B}} \;=\; M^{\mathscr{B}_1}_{\mathscr{B}}\cdot[T]_{\mathscr{B}_1}\cdot M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}_1}\;,$$

com $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}_1}$ e $M^{\mathscr{B}_1}_{\mathscr{B}}$ as matrizes mudanças de base de $\mathscr{B}$ para $\mathscr{B}_1$ de $\mathscr{B}_1$ para $\mathscr{B}$, respectivamente.

Demonstração: No teorema acima considerando $\mathscr{B}' = \mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'_1 = \mathscr{B}_1$ bases de V obtemos:

$$[T]_{\mathscr{B}} \;=\; M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_1} \;\cdot\; [T]_{\mathscr{B}_1} \;\cdot\; M_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}} \;.$$

■

Observações 6.2.8

1. No **Teorema 6.2.6**, fazendo $Q = M_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}'}$ e $P = M_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}}$ temos:

$$[T]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}} \;=\; Q^{-1} \;\cdot\; [T]_{\mathscr{B}'_1}^{\mathscr{B}'} \;\cdot\; P \;.$$

2. No **Corolário 6.2.7**, fazendo $P = M_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}}$ temos $[T]_{\mathscr{B}} \;=\; P^{-1} \;\cdot\; [T]_{\mathscr{B}_1} \;\cdot\; P$.

6.2.1 Relação entre Matrizes de um Operador Linear

Definição 6.2.2 Dizemos que duas matrizes A e B em $M_n(\mathbb{K})$ são **matrizes semelhantes** se, e somente se, existe P uma matriz invertível em $M_n(\mathbb{K})$ tal que

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

Teorema 6.2.9 Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, as matrizes de T em relação a bases distintas são semelhantes.

Demonstração: Sejam $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ bases de V pela **Corolário 6.2.7** sabemos que:

$$[T]_{\mathscr{B}} = M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \cdot [T]_{\mathscr{B}'} \cdot M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}},$$

com $M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ e $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, respectivamente, a matriz mudança de base de $\mathscr{B}$ para $\mathscr{B}'$ e a matriz mudança de base de $\mathscr{B}'$ para $\mathscr{B}$.

Mas, por outro lado, segue do **Teorema 4.5.3 (ii)** que a matriz mudança de base $M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ é invertível e que $\left(M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} = M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.

Consequentemente temos $[T]_{\mathscr{B}} = \left(M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} \cdot [T]_{\mathscr{B}'} \cdot M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Portanto, as matrizes de T em relação a bases distintas são semelhantes. ■

Proposição 6.2.10 Matrizes semelhantes têm o mesmo determinante.

Demonstração: De fato, se A e B são semelhantes então, existe P uma matriz invertível em $M_n(\mathbb{K})$ tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Logo,

$$\det B = \det(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \det P^{-1} \cdot \det A \cdot \det P = \frac{1}{\det P} \cdot \det A \cdot \det P \overset{\det P^{-1} = \frac{1}{\det P}}{=} \det A.$$

■

Corolário 6.2.11 Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, as matrizes de T em relação a bases distintas têm mesmo determinante.

Demonstração: Pelo **Teorema 6.2.9** sabemos que as matrizes de T em relação a bases distintas são semelhantes, consequentemente pela **Proposição 6.2.10** segue o resultado. ■

Assim temos a seguinte definição:

Definição 6.2.3 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, o **determinante do operador** T, denotado por $\det T$, é dado por:

$$\det\ T = \det[T]_{\mathscr{B}},$$

com $\mathscr{B}$ uma base ordenada qualquer de V.

Teorema 6.2.12 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Então, T é invertível se, e somente se, $\det T \neq 0$.

Demonstração:

Do **Teorema 6.5.5** sabemos que T é automorfismo se, e somente se, $[T]_{\mathscr{B}}$ é invertível, para toda base $\mathscr{B}$ de V.

Portanto, T é invertível se, e somente se, $[T]_{\mathscr{B}}$ é invertível, para toda base $\mathscr{B}$ de V.

Consequentemente, T é invertível se, e somente se, $\det\ T \neq 0$.

■

6.3 Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Definição 6.3.1 Sejam V e W são espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear, a **imagem** de T, denotada por $\mathrm{Im}(T)$, é o seguinte subconjunto de W:

$$\mathrm{Im}(T) = \{w \in W;\ \text{existe algum}\ \ v \in V\ \ \text{com}\ w = T(v)\}.$$

Definição 6.3.2 Sejam V e W são espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear, o **núcleo** de T, denotada por $\ker(T)$, é o seguinte subconjunto de V:

$$\ker(T) = \{v \in V;\ T(v) = 0_W\}.$$

Exemplos 6.3.1 Determine o núcleo e a imagem das seguintes transformações lineares.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (ax,\ by)$, com a e b números reais.

(b) $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ dada por $T\big(p(t)\big) = p'(t)$, a derivada de polinômios de grau $\leq n$.

(c) $T_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T_A(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x+3y-z,\ 2y+z).$$

(d) $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) = (a_{11}+a_{12}+a_{21},\ a_{12}-a_{21}+a_{22},\ 2a_{21}-a_{22}).$$

(e) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ dada por $T(x,y) = 2x + y\,t + 3y\,t^2 - x\,t^3$.

Solução:

(a) $(c,d) \in Im(T) \iff$ existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ T(x,y) = (c,d) \iff (ax,by) = (c,d)$.

1º Caso: $a = 0$ **e** $b \neq 0$**:** Neste caso teremos:

$$(c,d) \in \mathrm{Im}(T) \iff (0,by) = (c,d) \iff \begin{cases} c = 0 \\ y \overset{b\neq 0}{=} \dfrac{d}{b} \end{cases}$$

Logo, tomando $\left(x, \dfrac{d}{b}\right)$, com $x \in \mathbb{R}$ qualquer, temos

$$T\left(x, \frac{d}{b}\right) = \left(0 \cdot x, b \cdot \frac{d}{b}\right) = (0,d) = (c,d).$$

Portanto, $\mathrm{Im}(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0\}$.

Por outro lado,

$$(x,y) \in \ker(T) \iff T(x,y) = (0,0) \iff (0,by) = (0,0) \overset{b\neq 0}{\iff} y = 0.$$

Logo, $\ker(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\}$.

2º Caso: $a \neq 0$ **e** $b = 0$**:** Analogamente ao caso anterior, temos:

$$\mathrm{Im}(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\} \quad \text{e} \quad \ker(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0\}.$$

3º Caso: $a \neq 0$ **e** $b \neq 0$**:** Neste caso teremos:

$$(c,d) \in \mathrm{Im}(T) \iff (ax,by) = (c,d) \iff \begin{cases} x \overset{a\neq 0}{=} \dfrac{c}{a} \\ \\ y \overset{b\neq 0}{=} \dfrac{d}{b} \end{cases}$$

Logo, tomando $\left(\dfrac{c}{a}, \dfrac{d}{b}\right)$ temos $T\left(\dfrac{c}{a},\ \dfrac{d}{b}\right) = \left(a \cdot \dfrac{c}{a}, b \cdot \dfrac{d}{b}\right) = (c,d)$.

Portanto, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$.

Por outro lado,

$$(x,y) \in \ker(T) \iff T(x,y) = (0,0) \iff (ax,by) = (0,0)$$

$$\iff \begin{cases} ax = 0 \\ by = 0 \end{cases} \overset{a\neq 0 \text{ e } b\neq 0}{\iff} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Logo, $\ker(T) = \{(0,0)\}$.

(b) $q(t) \in \mathrm{Im}(T) \iff$ existe $p(t) \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ tal que $T\big(p(t)\big) = q(t) \iff p'(t) = q(t)$

$$\iff \int p'(t)\,dt = \int q(t)\,dt \iff p(t) = \int q(t)\,dt.$$

Observemos que a integral de um polinômio é um polinômio de grau k, se e somente se, este polinômio é de grau $k-1$.

Assim, como grau de $p = n$, devemos ter grau de $q = n-1$.

Portanto, $\mathrm{Im}(T) = \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Agora, $p(t) \in \ker(T) \iff T\big(p(t)\big) = 0 \iff p'(t) = 0 \iff p$ é um polinômio constante.

Logo, $\ker(T) = \mathscr{P}_0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(c) $(a,b) \in \text{Im}(T) \iff$ existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$; $T(x,y,z) = (a,b)$

$$\iff (x+3y-z,\ 2y+z) = (a,b) \iff \left\{ \begin{array}{rl} x+3y-z = a \\ 2y+z = b \end{array} \right. .$$

Tomando, por exemplo, $\left\{ \begin{array}{l} z = b \\ y = 0 \\ x = a+b \end{array} \right.$ temos:

$$T(x,y,z) = T(a+b,0,b) = (a+b+3\cdot 0-b,\ 2\cdot 0+b) = (a,b).$$

Portanto, $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$.

Por outro lado,

$$(x,y,z) \in \ker(T) \iff T(x,y,z) = (0,0) \iff (x+3y-z,\ 2y+z) = (0,0)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rl} x+3y-z = 0 \\ 2y+z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} z = -2y \\ x = -5y \end{array} \right. .$$

Logo, $\ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = -5y \text{ e } z = -2y\}$.

(d) $(a,b,c) \in \text{Im}(T) \iff$ existe $\left[\begin{array}{cc} x & y \\ z & t \end{array} \right] \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $T\left(\left[\begin{array}{cc} x & y \\ z & t \end{array} \right] \right) = (a,b,c)$, ou seja,

$$(x+y+z,\ y-z+t,\ 2z-t) = (a,b,c) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & a \\ & & y & - & z+t & = & b \\ & & & & 2z-t & = & c \end{array} \right. .$$

Tomando, por exemplo, $\left\{ \begin{array}{rcl} t & = & -c \\ z & = & 0 \\ y & = & b+c \\ x & = & a-b-c \end{array} \right.$. temos:

$$T\left(\left[\begin{array}{cc} x & y \\ z & t \end{array} \right] \right) = T\left(\left[\begin{array}{cc} a-b-c & b+c \\ 0 & -c \end{array} \right] \right) = (a,b,c).$$

Portanto, $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

Por outro lado,

$$\left[\begin{array}{cc} x & y \\ z & t \end{array} \right] \in \ker(T) \iff T\left(\left[\begin{array}{cc} x & y \\ z & t \end{array} \right] \right) = (0,0,0)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z+t & = & 0 \\ & & & & 2z-t & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} t & = & 2z \\ y & = & -z \\ x & = & 0 \end{array} \right. .$$

Logo, $\ker(T) = \left\{ \left[\begin{array}{cc} x & y \\ z & t \end{array} \right];\ x = 0,\ y = -z \text{ e } t = 2z \right\}$.

(e) $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \text{Im}(T) \iff$ existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x,y) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \iff 2x + yt + 3yt^2 - xt^3 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x & = & a_0 \\ y & = & a_1 \\ 3y & = & a_2 \\ -x & = & a_3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{a_0}{2} \\ y & = & a_1 \\ y & = & \dfrac{a_2}{3} \\ -x & = & a_3 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a_0}{2} = -a_3 \\ a_1 = \dfrac{a_2}{3} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a_0 = -2a_3 \\ a_2 = 3a_1 \end{array} \right. .$$

Portanto,

$$\mathrm{Im}(T) = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R});\ a_0 = -2a_3 \ \text{ e } \ a_2 = 3a_1\}.$$

Agora, $(x,y) \in \ker(T) \iff T(x,y) = 0 \iff 2x + yt + 3yt^2 - xt^3 = 0$

$$\iff \begin{cases} 2x &= 0 \\ y &= 0 \\ 3y &= 0 \\ -x &= 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0).$$

Logo, $\ker(T) = \{(0,0)\}$.

Teorema 6.3.2 Sejam V e W são espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear, então:

(i) $\ker(T)$ é um subespaço de V.

(ii) $\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço de W.

Demonstração:

(i) Sabemos que $T(0_V) = 0_W$, portanto $\ker(T) \neq \emptyset$.

Dados $u,\ v \in \ker(T)$, temos:

$$T(u+v) = T(u) + T(v) = 0_W + 0_W = 0_W.$$

Portanto, $u + v \in \ker(T)$.

Agora, se $v \in \ker(T)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$T(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot T(v) = \lambda \cdot 0_W = 0_W.$$

Assim, $\lambda \cdot v \in \ker(T)$.

Logo, $\ker(T)$ é um subespaço de V.

(ii) Observemos que $\mathrm{Im}(T) = T(V)$, como V é subespaço de V, segue da propriedade $\mathbf{TL_4}$ que $\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço de W.

■

Observação 6.3.3 Segue da **Definição 6.2.1** que $\mathrm{Im}(T)$ é o subespaço correspondente ao espaço coluna da matriz $[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}$, como $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ bases de V e de W, respectivamente.

Exemplos 6.3.4 Determine a dimensão do núcleo e da imagem de T dos **Exemplos 6.3.1**.

Solução:

(a) $T(x,y) = (ax,\ by)$, com a e b números reais.

1º Caso: $a = 0$ e $b \neq 0$, ou seja, $T(x,y) = (0,\ by)$, com $b \neq 0$, então:

$\mathrm{Im}(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0\}$ e $\ker(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\}$.

Logo, $\dim \ker(T) \ = \ \dim\ \mathrm{Im}(T) = 1$.

2º Caso: $a \neq 0$ e $b = 0$, ou seja, $T(x,y) = (ax,\ 0)$, com $a \neq 0$, então:

$\text{Im}(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\}$ e $\ker(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0\}$.

Logo, $\dim\ker(T) = \dim\ \text{Im}(T) = 1$.

3º Caso: $T(x,y) = (ax,\ by)$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então:

$\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ e $\ker(T) = \{(0,0)\}$.

Logo, $\dim\ \text{Im}(T) = 2$ e $\dim\ker(T) = 0$.

(b) $T\big(p(t)\big) = p'(t)$, a derivada de polinômios de grau $\leq n$, vimos que:

$$\text{Im}(T) = \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R}) \text{ e que } \ker(T) = \mathscr{P}_0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

Logo, $\dim\ \text{Im}(T) = n$ e $\dim\ker(T) = 1$.

(c) $T(x,y,z) = (x+3y-z,\ 2y+z)$, vimos que

$$\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2 \text{ e que } \ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = -5y \text{ e } z = -2y\}.$$

Logo, $\dim\ \text{Im}(T) = 2$ e $\dim\ker(T) = 1$.

(d) $T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = (x+y+z,\ y-z+t,\ 2z-t)$, vimos que

$$\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3 \text{ e que } \ker(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix};\ x = 0,\ y = -z \text{ e } t = 2z \right\}.$$

Portanto, $\dim\ \text{Im}(T) = 3$ e $\dim\ker(T) = 1$.

(e) $T(x,y) = 2x + yt + 3yt^2 - xt^3$, vimos que:

$$\text{Im}(T) = \left\{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}); a_0 = -2a_3 \text{ e } a_2 = 3a_1\right\} \text{ e } \ker(T) = \{(0,0)\}.$$

Logo, $\dim\ \text{Im}(T) = 2$ e $\dim\ker(T) = 0$.

Observação 6.3.5 Nos exemplos acima podemos ver que em todos os casos $\dim\ker(T) + \dim\ \text{Im}(T) = \dim\ D(T)$, isto não foi uma coincidência, como veremos no teorema a seguir.

6.3.1 Teorema do Núcleo e da Imagem

Teorema 6.3.6 (Teorema do Núcleo e da Imagem)
Sejam V e W são espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, com $\dim\ V = n$, e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear, então:

$$\dim\ V = \dim\big(\ker(T)\big) + \dim\big(\text{Im}(T)\big).$$

Demonstração: Como $\ker(T)$ é um subespaço de V, então $\dim\big(\ker(T)\big) = k \leq n = \dim V$.

Seja $\{v_1, \cdots, v_k\}$ uma base de $\ker(T)$, pelo teorema do completamento existem $n-k$ vetores, $v_{k+1}, \cdots, v_n$, em V, tais que

$$\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n\} \quad \text{é uma base de} \quad V.$$

Mostremos que $\mathscr{B}' = \big\{T(v_{k+1}), \cdots, T(v_n)\big\}$ é uma base de $\mathrm{Im}(T)$.

Dado $w \in Im(T)$, existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$, como $\mathscr{B}$ é uma base de V existem escalares $a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ tais que $v = a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k + a_{k+1} \cdot v_{k+1} + \cdots + a_n \cdot v_n$.
Logo,

$$\begin{aligned} w = T(v) &= T\big(a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k + a_{k+1} \cdot v_{k+1} + \cdots + a_n \cdot v_n\big) \\ &= a_1 \cdot T(v_1) + \cdots + a_k \cdot T(v_k) + a_{k+1} \cdot T(v_{k+1}) + \cdots + a_n \cdot T(v_n) \\ &= a_{k+1} \cdot T(v_{k+1}) + \cdots + a_n \cdot T(v_n), \end{aligned}$$

pois $v_1, \cdots, v_k$ estão em $\ker(T)$.

Assim, como w é um elemento arbitrário $\mathrm{Im}(T)$ segue que $\mathrm{Im}(T) = \big[T(v_{k+1}), \cdots, T(v_n)\big]$.

Resta mostrar que $\big\{T(v_{k+1}), \cdots, T(v_n)\big\}$ é um conjunto L. I.

Sejam $\lambda_{k+1}, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\lambda_{k+1} \cdot T(v_{k+1}) + \cdots + \lambda_n \cdot T(v_n) = 0_W \overset{T \text{ é linear}}{\Longleftrightarrow} T(\lambda_{k+1}\, v_{k+1} + \cdots + \lambda_n v_n) = 0_W$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_{k+1} \cdot v_{k+1} + \cdots + \lambda_n \cdot v_n \in \ker(T).$$

Como $\{v_1, \cdots, v_k\}$ é uma base de $\ker(T)$, então podemos escrever

$$\lambda_{k+1} \cdot v_{k+1} + \cdots + \lambda_n \cdot v_n = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k$$

$$\Longleftrightarrow \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k - \lambda_{k+1} \cdot v_{k+1} - \cdots - \lambda_n \cdot v_n = 0_V.$$

Mas $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n\}$ é uma base de V, portanto devemos ter

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = -\lambda_{k+1} = \cdots = -\lambda_n = 0, \quad \text{consequentemente} \quad \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Daí que $\big\{T(v_{k+1}), \cdots, T(v_n)\big\}$ é um conjunto L. I.

Logo, $\mathscr{B}' = \big\{T(v_{k+1}), \cdots, T(v_n)\big\}$ é base de $\mathrm{Im}(T)$.

Consequentemente $\dim \mathrm{Im}(T) = n-k$.

Portanto,

$$\dim \ker(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = k + (n-k) = n = \dim V.$$

■

Proposição 6.3.7 Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, com $\dim V = n$ e $\dim W = m$.
Se $T : V \longrightarrow W$ e $S : V \longrightarrow W$ são transformações lineares definidas por A e B matrizes em $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, tais que $B = Q \cdot A \cdot P$, com $Q \in M_m(\mathbb{K})$ e $P \in M_n(\mathbb{K})$ matrizes invertíveis, então

$$\dim\big(\ker(T)\big) = \dim\big(\ker(S)\big).$$

Demonstração: Por hipótese $T(v) = w \iff A \cdot [v] = [w]$ e

$$S(v) = w \iff B \cdot [v] = [w] \iff \big(Q \cdot A \cdot P\big) \cdot [v] = [w].$$

Se $\{u_1, \cdots, u_r\}$ é base de $\ker(S)$, então

$$S(u_i) = 0_W, \quad \text{para todo} \quad i \in \{1, \cdots, r\}.$$

Consequentemente,

$$B \cdot [u_i] = [0_W], \quad \text{para todo} \quad i \in \{1, \cdots, r\}.$$

Portanto,

$$\big(Q \cdot A \cdot P\big) \cdot [u_i] = [0_W], \quad \text{para todo} \quad i \in \{1, \cdots, r\}.$$

Como Q é invertível aplicamos Q^{-1} à esquerda na igualdade acima:

$$Q^{-1} \cdot \big(Q \cdot A \cdot P\big) \cdot [u_i] = Q^{-1} \cdot [0_W] \iff \big(A \cdot P\big) \cdot [u_i] = A \cdot (P \cdot [u_i]) = [0_W], \quad \text{para todo} \quad i \in \{1, \cdots, r\}.$$

Portanto, $\big\{P \cdot [u_1], \cdots, P \cdot [u_r]\big\} \subset \ker(T)$, consideremos escalares $a_1, \cdots, a_r$ tais que:

$$a_1 \cdot P \cdot [u_1] \ + \ \cdots \ + \ a_r \cdot P \cdot [u_r] = [0_V] \overset{P \text{ é linear}}{\Longrightarrow} P \cdot \big(a_1 \cdot [u_1] \ + \ \cdots \ + \ a_r \cdot [u_1]\big) = [0_V].$$

Aplicando P^{-1} à esquerda na última igualdade obtemos

$$a_1 \cdot [u_1] \ + \ \cdots \ + \ a_r \cdot [u_1] \ = \ [0_V],$$

como $\{u_1, \cdots, u_r\}$ é base, segue que $a_1 = \cdots = a_r = 0$.

Consequentemente, $\big\{P \cdot [u_1], \cdots, P \cdot [u_r]\big\}$ é um subconjunto L.I. de $\ker(T)$.

Por outro lado, se $v \in \ker(T)$, então

$$T(v) = 0_W \iff A \cdot [v] = [0_W] \iff \big(Q^{-1} \cdot B \cdot P^{-1}\big) \cdot [v] = [0_W].$$

Logo, aplicando Q à esquerda obtemos:

$$\big(B \cdot P^{-1}\big) \cdot [v] = [0_W] \iff B \cdot \big(P^{-1} \cdot [v]\big) = [0_W].$$

Consequentemente, $P^{-1} \cdot [v] \in \ker(S)$, portanto existem escalares $b_1, \cdots, b_r$ tais que

$$P^{-1} \cdot [v] \ = \ b_1 \cdot [u_i] \ + \ \cdots \ + \ b_r \cdot [u_r].$$

Aplicando P à esquerda na igualdade acima

$$[v] = P \cdot \big(b_1 \cdot [u_i] \ + \ \cdots \ + \ b_r \cdot [u_r]\big) \overset{P \text{ é linear}}{=} b_1 \cdot P \cdot [u_1] \ + \ \cdots \ + \ b_r \cdot P \cdot [u_r].$$

Portanto, $\big[P \cdot [u_1], \cdots, P \cdot [u_r]\big] = \ker(T)$, daí que e $\big\{P \cdot [u_1], \cdots, P \cdot [u_r]\big\}$ é base de $\ker(T)$.

Assim, $\dim \ker(S) = \dim \ker(T)$.

■

Agora observemos que dada $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear, pelo **Teorema 6.3.6 (do Núcleo e da Imagem)**, tomando $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n\}$ base de V obtida pelo completamento de $\{v_1, \cdots, v_k\}$ uma base do $\ker(T)$, considerando $\mathscr{B}'$ uma base de W, então a matriz de T em relação às bases $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ é dada por:

$$[T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} T(v_1) & \cdots & T(v_k) & T(v_{k+1}) & \cdots & T(v_n) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & \cdots & 0 & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mk+1} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ coordenadas do 1º vetor de } \mathscr{B}' \\ \vdots \\ \leftarrow \text{ coordenadas do mº vetor de } \mathscr{B}' \end{array},$$

como $\{T(v_{k+1}), \cdots, T(v_n)\}$ é base de $\mathrm{Im}(T)$, segue que as $n-k$ últimas colunas de $[T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ são L.I..

Observe que, pelo **Corolário 6.2.7** e pela **Proposição 6.3.7** acima, a nulidade de $[T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ independe das bases consideradas em V e em W, consequentemente o mesmo ocorre com o posto de $[T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Assim, temos o seguinte resultado:

Proposição 6.3.8 Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear, dadas $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ bases quaisquer de V e W, respectivamente, então:

(i) $\dim \mathrm{Im}(T) =$ posto $[T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

(ii) $\dim \ker(T) =$ nulidade de $[T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} =$ número de colunas de $[T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} -$ posto $[T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Determinando a Imagem e o Núcleo através de uma Matriz da Transformação Linear

Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear, dadas $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ bases quaisquer de V e W, respectivamente, para determinar $\mathrm{Im}(T)$ e $\ker(T)$ procedemos da seguinte maneira:

1º Passo: Encontramos a matriz $[T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

2º Passo: Efetuamos operações elementares nas colunas da matriz $[T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$, até obter uma matriz equivalente com k colunas nulas e $n-k$ colunas L.I.

3º Passo: Os vetores de W correspondentes às $n-k$ colunas L.I. da matriz $[T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ formam uma base de $\mathrm{Im}(T)$.

4º Passo: Uma base do núcleo é obtida pelos vetores combinações lineares dos vetores da base $\mathscr{B}$ de V que produziram as k colunas nulas da matriz equivalente de $[T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ do **2º Passo**.

Exemplos 6.3.9 Determine o núcleo e a imagem de T utilizando uma matriz da transformação linear.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y,z) = (x+3y-z,\ 2y+z)$.

(b) $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = (a_{11}+a_{12}+a_{21}) + (a_{12}-a_{21}+a_{22})t + (2a_{21}-a_{22})t^2.$$

(c) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ dada por $T(x,y) = 2x+yt+3yt^2-xt^3$.

(d) $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(a_0+a_1t+a_2t^2) = \big(a_0+a_2,\ a_0+a_2,\ 2(a_1+a_2)\big)$.

(e) $T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x_1+y_1i,\ x_2+y_2i) = \big(x_1+2x_2,\ -x_1+2y_2\big)$.

Solução:

(a) A matriz de T em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}^2$ é $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, logo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} C_2 \longrightarrow C_2 - 3C_1 \\ C_3 \longrightarrow C_3 + C_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \; C_2' \longrightarrow C_2' - 2C_3' \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\text{Im}(T) = \big[(1,0),\ (0,1)\big] = \mathbb{R}^2$ e $\dim\ker(T) = 1$.

Observemos que

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{R}^3} = C_2' - 2C_3' &= (C_2 - 3C_1) - 2(C_3 + C_1) = C_2 - 5C_1 - 2C_3 \\ &= T(e_2) - 5T(e_1) - 2T(e_3) = T(e_2 - 5e_1 - 2e_3). \end{aligned}$$

Portanto, $\ker(T) = \big[e_2 - 5e_1 - 2e_3\big] = \big[(-5,\ 1,\ -2)\big]$.

(b) A matriz de T em relação às bases canônicas de $M_2(\mathbb{R})$ e de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ é $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, logo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; C_2' \to C_2' + 2C_3' \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\text{Im}(T) = \big[1 + t + 4t^2,\ t + t^2\big]$ e $\dim\ker(T) = 2$.

Observemos que $T(E_{22}) = 0_{\mathscr{P}_2(\mathbb{R})}$ e que

$$\begin{aligned} 0_{\mathscr{P}_2(\mathbb{R})} = C_2' + 2C_3' &= (C_2 - C_1) + 2(C_3 - C_1) = C_2 - 3C_1 + 2C_3 \\ &= T(E_{12}) - 3T(E_{11}) + 2T(E_{21}) = T(E_{12} - 3E_{11} + 2E_{21}). \end{aligned}$$

Portanto, $\ker(T) = \big[E_{12} - 3E_{11} + 2E_{21},\ E_{22}\big] = \left[\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$.

(c) A matriz de T em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ é $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, como as colunas desta matriz são L. I. segue que $\text{Im}(T) = \big[2 - t^3,\ t + 3t^2\big]$ e $\dim\ker(T) = 0$, portanto $\ker(T) = \{0_V\}$.

(d) A matriz de T em relação às bases canônicas de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ e de $\mathbb{R}^3$ é $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, logo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \; C_3 \longrightarrow C_3 - C_2 - C_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\text{Im}(T) = \big[(1,1,0),\ (0,0,2)\big] = \mathbb{R}^2$ e $\dim\ker(T) = 1$.

Observemos que $0_{\mathscr{P}_2(\mathbb{R})} = C_3 - C_2 - C_1 = T(t^2) - T(t) - T(1) = T(-1 - t + t^2)$.

Portanto, $\ker(T) = \big[-1 - t + t^2\big]$.

(e) A matriz de T em relação às bases canônicas de $\mathbb{C}^2$ e de $\mathbb{R}^2$ é $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, logo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} C_2 \to C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftrightarrow C_4 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ C_3' \to C_3' - C_2' \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\mathrm{Im}(T) = \big[(1,-1),\ (0,2)\big] = \mathbb{R}^2$ e $\dim \ker(T) = 2$.

Observemos que $T(ie_1) = 0_{\mathbb{R}^2}$ e que

$$0_{\mathbb{R}^2} = C_3' - C_2' = C_4 - (C_2 - 2C_1) = T(ie_2) - \big(T(e_2) - 2T(e_1)\big) = T(2e_1 - e_2 + ie_2).$$

Portanto, $\ker(T) = \big[2e_1 - e_2 + ie_2,\ ie_1\big] = \big[(2,1+i),\ (i,0)\big]$.

6.4 Transformações Lineares Injetoras e Sobrejetoras

Definição 6.4.1 Sejam V e W são espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear, dizemos que:

(i) T é **injetora** se, e somente se, para todo u e v em V, se $T(u) = T(v)$, então $u = v$.

Equivalentemente, T é **injetora** se, e somente se, para todo u e v em V, se $u \neq v$, então $T(u) \neq T(v)$.

(ii) T é **sobrejetora** se, e somente se, $\mathrm{Im}(T) = W$, ou seja, para todo $w \in W$ existe algum $v \in V$ tal que $T(v) = w$.

Teorema 6.4.1 Sejam V e W são espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear, T é **injetora** se, e somente se, $\ker(T) = \{0_V\}$.

Demonstração: Suponhamos que T é injetora, mostremos que $\ker(T) = \{0_V\}$.

Seja $v \in \ker(T)$, então $T(v) = 0_W$, mas sabemos que $T(0_V) = 0_W$, daí que $T(v) = T(0_V)$, como T é injetora segue que $v = 0_V$.

Portanto, $\ker(T) = \{0_V\}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\ker(T) = \{0_V\}$ e mostremos que T é injetora.

Sejam u e v em V tais que $T(u) = T(v)$, então temos:

$$T(u) - T(v) = 0_W \iff T(u - v) = 0_W,$$

isto implica que $u - v \in \ker(T)$, mas como $\ker(T) = \{0_V\}$, segue que $u - v = 0_V \iff u = v$.

Portanto, T é injetora. ∎

Exemplos 6.4.2 Determine quais transformações lineares, dos Exemplos 6.3.4, são injetoras e sobrejetoras.

Solução:

(a) $T(x,y) = (ax,\ by)$, com a e b números reais.

1º Caso: $a = 0$ e $b \neq 0$

Como $\text{Im}(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0\} \neq \mathbb{R}^2$, então T não é sobrejetora e $\ker(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\} \neq \{(0,0)\}$, então T não é injetora.

2º Caso: $a \neq 0$ e $b = 0$

Como $\text{Im}(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\} \neq \mathbb{R}^2$, então T não é sobrejetora e $\ker(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0\} \neq \{(0,0)\}$, então T não é injetora.

3º Caso: $a \neq 0$ e $b \neq 0$

Como $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$, então T é sobrejetora e $\ker(T) = \{(0,0)\}$, então é injetora.

(b) $T\big(p(t)\big) = p'(t)$, a derivada de polinômios de grau $\leq n$.

$\text{Im}(T) = \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})$, então T é sobrejetora e $\ker(T) = \mathscr{P}_0(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \neq \{0\}$, portanto T não é injetora.

(c) $T(x,y,z) = (x + 3y - z,\ 2y + z)$

$\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$, então T é sobrejetora e

$$\ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = -5y \text{ e } z = -2y\} \neq \{(0,0,0)\},$$

portanto T não é injetora.

(d) $T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) = (a_{11} + a_{12} + a_{21},\ a_{12} - a_{21} + a_{22},\ 2a_{21} - a_{22})$.

$\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$, então T é sobrejetora e

$$\ker(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};\ a_{11} = 0,\ a_{12} = -a_{12} \text{ e } a_{22} = 2a_{21} \right\} \neq \{(0,0,0)\},$$

portanto T não é injetora.

(e) $T(x,y) = 2x + y\,t + 3y\,t^2 - x\,t^3$.

$\text{Im}(T) = \left\{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}); a_0 = 2a_3 \text{ e } a_2 = 3a_1\right\} \neq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, portanto T não é sobrejetora e $\ker(T) = \{(0,0)\}$, logo T é injetora.

Proposição 6.4.3 Sejam V, W e U são espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, dadas $T : V \longrightarrow W$ e $S : W \longrightarrow U$ transformações lineares. Mostre que: então:

(i) Se T e S são injetoras, então $S \circ T$ é injetora.

(ii) Se T e S são sobrejetoras, então $S \circ T$ é sobrejetora.

(iii) Se $S \circ T$ é injetora, então T é injetora.

(iv) Se $S \circ T$ é sobrejetora, então S é sobrejetora.

Demonstração: Observemos que a composição $S \circ T$ é uma transformação linear de V em U.

(i) Se $v \in \ker(S \circ T)$, então

$$(S \circ T)(v) = 0_U \Longleftrightarrow S\big(T(v)\big) = 0_U \Longleftrightarrow T(v) \in \ker(S) \overset{S \text{ é injetora}}{=} \{0_W\}.$$

Logo, $T(v) = 0_W$, mas como T é injetora segue que $v = 0_V$.

Portanto, $\ker(S \circ T) = \{0_V\}$, consequentemente $S \circ T$ é injetora.

(ii) Observemos que

$$\mathrm{Im}(S\circ T) = S\circ T(V) = S\big(T(V)\big) \overset{T \text{ é sobrejetora}}{=} S(W) \overset{S \text{ é sobrejetora}}{=} U.$$

Portanto, $\mathrm{Im}(S\circ T) = U$, consequentemente $S\circ T$ é sobrejetora.

(iii) Suponhamos que $S\circ T$ é injetora, se $v \in \ker(T)$, então $T(v) = 0_W$.
Logo,

$$S\big(T(v)\big) = S(0_W) = 0_U \Longleftrightarrow S\circ T(v) = 0_U \Longleftrightarrow v \in \ker(S\circ T) \overset{S\circ T \text{ é injetora}}{=} \{0_V\} \Longrightarrow v = 0_V.$$

Portanto, $\ker(T) = \{0_V\}$, consequentemente T é injetora.

(iv) Suponhamos que $S\circ T$ é sobrejetora, portanto $\mathrm{Im}(S\circ T) = U$, logo

$$U = \mathrm{Im}(S\circ T) = S\circ T(V) = S\big(T(V)\big) \subset S(W) = \mathrm{Im}(S) \subset U.$$

Portanto, $\mathrm{Im}(S) = U$, consequentemente S é sobrejetora.

■

Corolário 6.4.4 (**Consequências do Teorema do Núcleo e da Imagem**)

Sejam V e W são espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, com $\dim V = n$ e $\dim W = m$, e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear, então:

(i) Se $n = m$, então T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.

(ii) Se $n < m$, então T não é sobrejetora.

(iii) Se $n > m$, então T não é injetora.

(iv) Se $n = m$ e T é injetora, então T leva base de V em base de W.

Demonstração:

(i) Suponhamos que $n = m$, sabemos que:
T é injetora se, e somente se,

$$\ker(T) = \{0_V\} \Longleftrightarrow \dim\ \ker(T) = 0 \overset{\text{Teo. 6.3.6}}{\Longrightarrow} \dim\ V = \dim\ \mathrm{Im}(T)$$

$$\overset{\dim V = \dim W}{\Longrightarrow} \dim\ W = \dim\ \mathrm{Im}(T) \overset{\mathrm{Im}(T) \text{ é subesp. de } W}{\Longrightarrow} \mathrm{Im}(T) = W.$$

Portanto, T é sobrejetora.

Deixamos ao leitor a verificação de que se $\dim V = \dim W$ e T é sobrejetora, então T é injetora.

(ii) Se T fosse sobrejetora, então teríamos $\mathrm{Im}(T) = W$, consequentemente:

$$m = \dim\ W = \dim\ \mathrm{Im}(T) \overset{\text{Teo. 6.3.6}}{\leq} \dim\ V = n.$$

Contrariando a hipótese de que $n < m$.

(iii) Se T fosse injetora, então teríamos $\ker(T) = \{0_V\}$, e portanto $\dim\ \ker(T) = 0$, logo:

$$n = \dim\ V \overset{\text{Teo. 6.3.6}}{=} \dim\ \mathrm{Im}(T) \overset{\mathrm{Im}(T) \text{ é subesp. de } W}{\leq} \dim\ W = m.$$

Contrariando a hipótese de que $n > m$.

(iv) Suponhamos que $n = m$ e T é injetora, seja $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ uma base de V.

Dado $w \in W$ elemento arbitrário, como T é sobrejetora, existe um único $v \in V$ tal que $w = T(v)$, como $\mathscr{B}$ é base de V existem escalares $a_1, a_2, \cdots, a_n$ em $\mathbb{K}$ tais que $v = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \cdots + a_n \cdot v_n$, consequentemente:

$$w = T(v) = T(a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \cdots + a_n \cdot v_2)$$
$$\overset{T \text{ é linear}}{=} a_1 \cdot T(v_1) + a_2 \cdot T(v_2) + \cdots + a_n \cdot T(v_n).$$

Portanto, $W = [T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)]$, como $\dim W = n$, então $\mathscr{B}' = \{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)\}$ é base de W.

■

6.5 Inversa de uma Transformação Linear

Definição 6.5.1 Sejam V e W são espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear, dizemos que T é **bijetora** se, e somente se, T é injetora e sobrejetora.

Se $T : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear bijetora, então:

(i) Para todo $w \in W$, existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$, pois $\mathrm{Im}(T) = W$.

(ii) O elemento v do item (i), tal que $T(v) = w$, é único, pois T é injetora.

Assim, podemos considerar a aplicação

$$S : \begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & V \\ w & \longmapsto & S(w) = v \end{array}, \quad \text{tal que} \quad T(v) = w.$$

Definição 6.5.2 Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear bijetora, a aplicação $S : W \longrightarrow V$ acima é chamada **inversa** de T e indicada por T^{-1}, dizemos também que T é uma transformação invertível.

Assim, $T^{-1}(w) = v$ se, e somente se, $T(v) = w$.

Observações 6.5.1 (a) Se $T : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear bijetora e $T^{-1} : W \longrightarrow V$ é sua inversa, então temos:

$$T^{-1} \circ T = Id_V \quad \text{e} \quad T \circ T^{-1} = Id_W.$$

(b) Na definição de inversa de uma transformação linear é essencial a condição de que a transformação seja bijetora.

De fato, a condição de T é injetora é necessária, pois se existissem v_1 e v_2 elementos distintos em V tais que $T(v_1) = T(v_2) = w_1$ não teríamos como estabelecer $T^{-1}(w_1)$.

Já a condição de T é sobrejetora é necessária para que T^{-1} possa ser aplicada a cada elemento de W, que é o seu domínio, pois se existisse $w \in W$ tal que $w \notin \mathrm{Im}(T)$, então $T^{-1}(w)$ não estaria definida.

Teorema 6.5.2 Se $T : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear bijetora e $T^{-1} : W \longrightarrow V$ é sua inversa, então T^{-1} também é linear.

Demonstração:

(i) Sejam w_1 e w_2 em W, então $w_1 + w_2 \in W$, e portanto, existe $v \in V$ tal que

$$T^{-1}(w_1 + w_2) = v. \tag{6.5.1}$$

Logo,

$$w_1 + w_2 = T(v). \tag{6.5.2}$$

Como $w_1 \in W$ e $w_2 \in W$, existem $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$, consequentemente

$$w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) \overset{T \text{ é linear}}{=} T(v_1 + v_2). \tag{6.5.3}$$

Além disso,

$$v_1 = T^{-1}(w_1) \quad \text{e} \quad v_2 = T^{-1}(w_2). \tag{6.5.4}$$

Como T é injetora segue de 6.5.2 e de 6.5.3 que $v = v_1 + v_2$.

Assim, em 6.5.1 substituindo por 6.5.4 temos:

$$T^{-1}(w_1 + w_2) = v_1 + v_2 = T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2).$$

(ii) Sejam $w \in W$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então $\lambda w \in W$ e existe $v \in V$ tal que

$$T^{-1}(\lambda w) = v \Longleftrightarrow \lambda w = T(v). \tag{6.5.5}$$

Como $w \in W$ existe $u \in V$ tal que

$$T(u) = w \Longleftrightarrow T^{-1}(w) = u. \tag{6.5.6}$$

Assim,

$$T(\lambda u) \overset{T \text{ é linear}}{=} \lambda T(u) = \lambda w. \tag{6.5.7}$$

Como T é injetora segue de 6.5.5 e 6.5.7 que

$$v = \lambda u. \tag{6.5.8}$$

Logo, de 6.5.5 e de 6.5.6 que

$$T^{-1}(\lambda w) = \lambda u = \lambda T^{-1}(w).$$

De (i) e (ii) concluímos que T^{-1} é linear.

■

6.5.1 Isomorfismo Linear

Definição 6.5.3 Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear invertível, ou seja, possui inversa, dizemos que T é um **isomorfismo linear**, ou simplesmente um **isomorfismo**.

A transformação linear $T^{-1} : W \longrightarrow V$ é chamada o **isomorfismo inverso** de T.

Observação 6.5.3 Se existe um isomorfismo $T : V \longrightarrow W$, de V em W, dizemos que V e W são **espaços vetoriais isomorfos**, ou que V é **isomorfo** a W.

Exemplos 6.5.4 (a) Mostre que a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (x+y,\ x-y)$ é um isomorfismo e determine sua inversa T^{-1}.

Solução:

Para mostrar que T é isomorfismo basta mostrar que T é bijetora, como $Dom(T) = CD(T)$ basta mostrar que T é injetora, para isso vamos mostrar que $\ker(T) = \{(0,0)\}$.

Observemos que $(x,y) \in \ker(T) \iff T(x,y) = (0,0) \iff (x+y,\ x-y) = (0,0)$

$$\iff \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=0 \\ 2y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

Portanto, $\ker(T) = \{(0,0)\}$, consequentemente T é um isomorfismo.

Determinando a inversa T^{-1}.

$$T^{-1}(x,y) = (a,b) \iff (x,y) = T(a,b) \iff (x,y) = (a+b,\ a-b)$$

$$\iff \begin{cases} a+b &= x \\ a-b &= y \end{cases} \iff \begin{cases} a+b &= x \\ 2b &= x-y \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{x+y}{2} \\ \\ b = \dfrac{x-y}{2} \end{cases}.$$

Logo, a inversa de T é dada por:

$$T^{-1}(x,y) = \left(\frac{x+y}{2},\ \frac{x-y}{2}\right).$$

(b) Mostre que a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$T(1,-1,0) = 2+t, \quad T(0,1,-1) = -1+t^2 \quad \text{e} \quad T(0,0,1) = t+t^2$$

é um isomorfismo e determine sua inversa $T^{-1} : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Solução:

É claro que $\mathscr{B} = \{(1,-1,0),\ (0,1,-1),\ (0,0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$, vamos escrever um vetor (x,y,z) arbitrário de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores de $\mathscr{B}$ para encontrar a expressão da transformação T.

$$(x,y,z) = a\cdot(1,-1,0) \ + \ b\cdot(0,1,-1) \ + \ c\cdot(0,0,1)$$

$$\iff \begin{cases} a & & & = x \\ -a & + & b & = y \\ & - & b + c & = z \end{cases} \iff \begin{cases} a &= x \\ b &= x+y \\ c &= x+y+z \end{cases}.$$

Logo,

$$(x,y,z) \ = \ x(1,-1,0) \ + \ (x+y)(0,1,-1) \ + \ (x+y+z)(0,0,1).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= T\big(x\,(1,-1,0) \ + \ (x+y)\,(0,1,-1) \ + \ (x+y+z)\,(0,0,1)\big) \\ &\overset{T \text{ é linear}}{=} x\,T(1,-1,0) \ + \ (x+y)\,T(0,1,-1) \ + \ (x+y+z)\,T(0,0,1) \\ &= x\,(2+t) \ + \ (x+y)\,(-1+t^2) \ + \ (x+y+z)\,(t+t^2) \\ &= (x-y) \ + \ (2x+y+z)\,t \ + \ (2x+2y+z)\,t^2. \end{aligned}$$

Assim, a transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ é dada por:

$$T(x,y,z) \;=\; (x-y) \;+\; (2x+y+z)\,t \;+\; (2x+2y+z)\,t^2.$$

Sabemos que T é isomorfismo se, e somente se, T é bijetora, mas como $\dim\mathbb{R}^3 = \dim\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ basta verificar que T é injetora, para isso vamos mostrar que $\ker(T) = \{(0,0,0)\}$.

$$(x,y,z) \in \ker(T) \Longleftrightarrow T(x,y,z) = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x-y) \;+\; (2x+y+z)\,t \;+\; (2x+2y+z)\,t^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right..$$

Portanto, $\ker(T) = \{(0,0,0)\}$, consequentemente T é um isomorfismo.

Determinando a inversa T^{-1}.

$$T^{-1}(a_0 \;+\; a_1t \;+\; a_2t^2) \;=\; (x,y,z) \Longleftrightarrow a_0 \;+\; a_1t \;+\; a_2t^2 \;=\; T(x,y,z)$$

$$\Longleftrightarrow a_0 \;+\; a_1t \;+\; a_2t^2 \;=\; (x-y) \;+\; (2x+y+z)\,t \;+\; (2x+2y+z)\,t^2$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & a_0 \\ 2x & + & y & + & z & = & a_1 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & a_2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & = & a_0 & - & a_1 & + & a_2 \\ y & = & & - & a_1 & + & a_2 \\ z & = & -2a_0 & + & 4a_1 & - & 3a_2 \end{array}\right..$$

Logo, a inversa de T é dada por:

$$T^{-1}(a_0 \;+\; a_1t \;+\; a_2t^2) \;=\; (a_0-a_1+a_2,\; -a_1+a_2,\; -2a_0+4a_1-3a_2).$$

(c) Considere o operador linear $T:\mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ dado por: $T\big(p(t)\big) = (3+t)\cdot p'(t) + 2\cdot p(t)$ e a transformação linear $S:\mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por: $T(a_0 \;+\; a_1t \;+\; a_2t^2) \;=\; (a_0+a_1,\; a_2,\; a_0-a_1)$.

Determine a transformação linear $S\circ T:\mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e verifique se é um isomorfismo, em caso afirmativo determine $(S\circ T)^{-1}$.

Solução:

Lembremos que se $p(t) = a_0 \;+\; a_1t \;+\; a_2t^2$, então $p'(t) = a_1 \;+\; 2a_2\,t$.

Logo,

$$\begin{aligned} T(a_0 \;+\; a_1t \;+\; a_2t^2) \;&=\; (3+t)\cdot(a_1 \;+\; 2a_2t) \;+\; 2\cdot(a_0 \;+\; a_1t \;+\; a_2t^2) \\ &=\; (2a_0+3a_1) \;+\; (3a_1+6a_2)\cdot t \;+\; 4a_2\cdot t^2 \end{aligned}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S\circ T(a_0 \;+\; a_1t \;+\; a_2t^2) \;&=\; S\big(T(a_0 \;+\; a_1t \;+\; a_2t^2)\big) \\ &=\; S\big((2a_0+3a_1) \;+\; (3a_1+6a_2)\cdot t \;+\; 4a_2\cdot t^2\big) \\ &=\; \big((2a_0+3a_1) \;+\; (3a_1+6a_2),\; 4a_2,\; (2a_0+3a_1) \;-\; (3a_1+6a_2)\big) \\ &=\; (2a_0+6a_1+6a_2,\; 4a_2,\; 2a_0-6a_2). \end{aligned}$$

Assim, a transformação linear é:

$$\begin{array}{rccl} S\circ T: & \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & a_0+a_1t+a_2t^2 & \longmapsto & S\circ T(a_0+a_1t+a_2t^2)=(2a_0+6a_1+6a_2,\ 4a_2,\ 2a_0-6a_2). \end{array}$$

Para verificar que $S\circ T$ é isomorfismo devemos mostrar que $S\circ T$ é bijetora, como $\dim\mathscr{P}_2(\mathbb{R})=\dim\mathbb{R}^3$ basta verificar que $S\circ T$ é injetora, para isso vamos mostrar que $\ker(S\circ T)=\{0\}$.

$$a_0+a_1t+a_2t^2\in\ker(S\circ T)\Longleftrightarrow S\circ T(a_0+a_1t+a_2t^2)=(0,0,0)$$

$$\Longleftrightarrow(2a_0+6a_1+6a_2,\ 4a_2,\ 2a_0-6a_2)=(0,0,0)$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a_0 & + & 6a_1 & + & 6a_2 & = & 0 \\ & & & & 4a_2 & = & 0 \\ 2a_0 & & & - & 6a_2 & = & 0 \end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & 0 \\ a_2 & = & 0 \end{array}\right.\Longleftrightarrow a_0+a_1t+a_2t^2\equiv 0.$$

Portanto, $\ker(S\circ T)=\{0\}$, consequentemente $S\circ T$ é um isomorfismo.

Determinando a inversa $(S\circ T)^{-1}$.

$$(S\circ T)^{-1}(x,y,z)=a_0+a_1t+a_2t^2\Longleftrightarrow(x,y,z)=S\circ T(a_0+a_1t+a_2t^2)$$

$$\Longleftrightarrow(x,y,z)=(2a_0+6a_1+6a_2,\ 4a_2,\ 2a_0-6a_2)=(0,0,0)$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a_0 & + & 6a_1 & + & 6a_2 & = & x \\ & & & & 4a_2 & = & y \\ 2a_0 & & & - & 6a_2 & = & z \end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} a_0 & = & \dfrac{3y+2z}{4} \\ a_1 & = & \dfrac{x-3y-z}{6} \\ a_2 & = & \dfrac{y}{4} \end{array}\right..$$

Logo, a inversa de $S\circ T$ é dada por:

$$(S\circ T)^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{3y+2z}{4}\right)+\left(\frac{x-3y-z}{6}\right)\cdot t+\left(\frac{y}{4}\right)\cdot t^2.$$

(d) Considere as transformações lineares $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ e $S:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$, dada respectivamente, por:

$$T(x,y)=(2x,\ x-y,\ y)\quad\text{e}\quad S(x,y,z)=(y-z,\ z-x).$$

(d_1) Determine a transformação linear $S\circ T$ e uma base para $\ker(S\circ T)$.

(d_2) Determine a transformação linear $T\circ S$ e uma base para $\mathrm{Im}(T\circ S)$.

(d_3) Verifique se $S\circ T$ e $T\circ S$, em caso afirmativo determine a inversa correspondente.

Solução:

(d_1) $S\circ T(x,y)=S\big(T(x,y)\big)=S(2x,\ x-y,\ y)=(x-y-y,\ y-2x)=(x-2y,\ y-2x)$.

Logo,

$$S\circ T(x,y)=(x-2y,\ y-2x).$$

Determinando $\ker(S\circ T)$:

$$(x,y)\in\ker(S\circ T)\Longleftrightarrow S\circ T(x,y)=(0,0)\Longleftrightarrow(x-2y,\ y-2x)=(0,0)$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & 2y & = & 0 \\ -2x & + & y & = & 0 \end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & 2y & = & 0 \\ & - & 3y & = & 0 \end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right..$$

Portanto, $\ker(S\circ T)=\{(0,0)\}$ e sua única base é $\mathscr{B}_{\ker(S\circ T)}=\emptyset$.

$$T\circ S(x,y,z) = T\big(S(x,y,z)\big) = T(y-z,\ z-x)$$

$$(d_2) \qquad = \big(2(y-z),\ y-z-(z-x),\ z-x\big)$$

$$= (2y-2z,\ x+y-2z,\ -x+z).$$

Logo,

$$T\circ S(x,y,z) = (2y-2z,\ x+y-2z,\ -x+z).$$

Determinando $\mathrm{Im}(T\circ S)$: $(x,y,z)\in \mathrm{Im}(T\circ S))$ se, e somente se, existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tal que

$$T\circ S(a,b,c) = (x,y,z) \Longleftrightarrow (2b-2c,\ a+b-2c,\ -a+c) = (x,y,z) \Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 2b & - & 2c & = & x \\ a & + & b & - & 2c & = & y \\ -a & & & + & c & = & z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & - & 2c & = & y \\ & & b & - & c & = & y+z \\ & & 2b & - & 2c & = & x \end{array}\right. .$$

Portanto, $x = 2(y+z)$, consequentemente $\mathrm{Im}(T\circ S) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x = 2(y+z)\}$ e $\mathscr{B}_{\mathrm{Im}(T\circ S)} = \{(2,1,0),\ (2,0,1)\}$ é uma base de $\mathrm{Im}(T\circ S)$.

(d_3) Como $\ker(S\circ T) = \{(0,0)\}$ e $S\circ T$ é um operador linear, segue que é um automorfismo, e portanto, possui inversa, determinemos a inversa $(S\circ T)^{-1}$.

$$(S\circ T)^{-1}(x,y) = (a,b) \iff (x,y) = S\circ T(a,b)$$

$$\iff (x,y) = (a-2b, b-2a) = (0,0,0)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} a & - & 2b & = & x \\ -2a & + & b & = & y \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{-x-2y}{3} \\ \\ b & = & \dfrac{-2x-y}{3} \end{array}\right. .$$

Logo, a inversa de $S\circ T$ é dada por:

$$(S\circ T)^{-1}(x,y) = \left(\frac{-x-2y}{3},\ \frac{-2x-y}{3}\right).$$

Por outro lado, como $\mathrm{Im}(T\circ S)\neq\mathbb{R}^3$ segue que $T\circ S$ não é sobrejetora, portanto não é um automorfismo, consequentemente, não existe inversa do operador $T\circ S$.

(e) Mostre que $\mathbb{C}^2$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ é isomorfo ao espaço vetorial real $M_2(\mathbb{R})$.

Solução:

Devemos apresentar um isomorfismo de $\mathbb{C}^2$ em $M_2(\mathbb{R})$.

Consideremos, por exemplo, a transformação $T:\mathbb{C}^2\longrightarrow M_2(\mathbb{R})$, definida por:

$$T(x_1+iy_1,\ x_2+iy_2) = \left[\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array}\right].$$

(i) T é transformação linear, pois:

$$\begin{aligned}
&T\big((x_1+iy_1,\ x_2+iy_2)+\lambda\cdot(a_1+ib_1,\ a_2+ib_2)\big)\\
&=T\big((x_1+iy_1,\ x_2+iy_2)+(\lambda\cdot a_1+i\lambda\cdot b_1,\ \lambda\cdot a_2+i\lambda\cdot b_2)\big)\\
&=T\big((x_1+\lambda\cdot a_1)+i(y_1+\lambda\cdot b_1),\ (x_2+\lambda\cdot a_2)+i(y_2+\lambda\cdot b_2)\big)\\
&=\begin{bmatrix} x_1+\lambda\cdot a_1 & y_1+\lambda\cdot b_1\\ x_2+\lambda\cdot a_2 & y_2+\lambda\cdot b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \lambda\cdot a_1 & \lambda\cdot b_1\\ \lambda\cdot a_2 & \lambda\cdot b_2\end{bmatrix}\\
=&\begin{bmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{bmatrix}+\lambda\cdot\begin{bmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{bmatrix}=T(x_1+iy_1,\ x_2+iy_2)+\lambda\cdot T(a_1+ib_1,\ a_2+ib_2).
\end{aligned}$$

(ii) Observemos que $(x_1+iy_1,\ x_2+iy_2)\in\ker T$ se, e somente se,

$$T(x_1+iy_1,\ x_2+iy_2)=0_{M_2(\mathbb{R})}\Longleftrightarrow T(x_1+iy_1,\ x_2+iy_2)=\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{bmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Longleftrightarrow\begin{cases} x_1 &=& 0\\ y_1 &=& 0\\ x_2 &=& 0\\ y_2 &=& 0\end{cases}\Longleftrightarrow(x_1+iy_1,\ x_2+iy_2)=0_{\mathbb{C}^2}.$$

Logo, $\ker T=\{0_{\mathbb{C}^2}\}$, portanto T é injetora, como $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^2=\dim M_2(\mathbb{R})$, segue que T é bijetora.

De (i) e (ii) segue que T é um isomorfismo, consequentemente $\mathbb{C}^2$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $M_2(\mathbb{R})$ são isomorfos.

Teorema 6.5.5 Sejam V e W são espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, espaços vetoriais de dimensão finita e $T:V\longrightarrow W$ uma transformação linear. Se $\dim V=\dim W=n$, então

$$T \text{ é isomorfismo se, e somente se, } [T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \text{ é invertível,}$$

com $\mathscr{B}$ uma base qualquer de V e $\mathscr{B}'$ uma base qualquer de W.

Além disso, a matriz de $T^{-1}:W\longrightarrow V$ em relação às bases $\mathscr{B}'$ e $\mathscr{B}$ é dada por:

$$[T^{-1}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}=\left([T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^{-1}.$$

Demonstração: Se T é isomorfismo, então existe $T^{-1}:W\longrightarrow V$ transformação inversa de T.

Dadas $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ bases quaisquer de V e de W, respectivamente, sabemos pelo **Teorema 6.2.3** que:

$$\big[T(v)\big]_{\mathscr{B}'}=[T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\cdot[v]_{\mathscr{B}}\qquad\text{para todo}\quad v\in V,$$

ou seja,

$$\big[T(v)\big]_{\mathscr{B}'}=[T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\cdot\big[T^{-1}\circ T(v)\big]_{\mathscr{B}}\qquad\text{para todo}\quad v\in V$$

$$\overset{T(v)=w}{\Longrightarrow}[w]_{\mathscr{B}'}=[T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\cdot\big[T^{-1}(w)\big]_{\mathscr{B}}\qquad\text{para todo}\quad w\in W$$

$$\overset{\text{Teo. 6.2.3}}{\Longrightarrow}I_n\cdot[w]_{\mathscr{B}'}=[T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\cdot[T^{-1}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\cdot[w]_{\mathscr{B}'}\qquad\text{para todo}\quad w\in W.$$

Logo, pelo **Corolário 1.1.30** segue que $[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} \cdot [T^{-1}]^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}} = I_n$.

Consequentemente, a matriz $[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}$ é invertível.

Além disso, $\left([T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}\right)^{-1} = [T^{-1}]^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}}$.

Reciprocamente, se $[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}$ é invertível para $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ bases quaisquer de V e de W, respectivamente, então dadas $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}'_1$ outras bases de V e de W, respectivamente, pelo **Teorema 6.2.6** sabemos que $[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} = M^{\mathscr{B}'_1}_{\mathscr{B}'} \cdot [T]^{\mathscr{B}_1}_{\mathscr{B}'_1} \cdot M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}_1}$, com $M^{\mathscr{B}'_1}_{\mathscr{B}'}$ e $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}_1}$ matrizes invertíveis, portanto $[T]^{\mathscr{B}_1}_{\mathscr{B}'_1}$ também é invertível.

Além disso, como $[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}$ é invertível, então posto $\left([T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}\right) = n = \dim\ V$, consequentemente T é sobrejetora e como $\dim\ V = \dim\ W$, segue T é bijetora, portanto isomorfismo. ■

Exemplo 6.5.6 Verifique se a transformação linear T, de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ em $M_2(\mathbb{R})$, dada por:

$$T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\right) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 & -a_3 \end{bmatrix}$$

é um isomorfismo, em caso afirmativo determine a transformação inversa T^{-1}.

Solução:

A matriz da transformação linear T em relação às bases canônicas de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ e de $M_2(\mathbb{R})$ é a seguinte:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como $\det[T] = 2 \neq 0$, segue que $[T]$ é invertível e portanto T é isomorfismo.

Além disso, já que

$$[T]^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

então $T^{-1} : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, matricialmente em relação às bases canônicas, é dada por:

$$\left[T^{-1}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right)\right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \dfrac{a_{12} + a_{21}}{2} \\ \dfrac{a_{12} - a_{21}}{2} \\ a_{22} \end{bmatrix}.$$

Portanto, $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11} + \left(\dfrac{a_{12} + a_{21}}{2}\right) \cdot t + \left(\dfrac{a_{12} - a_{21}}{2}\right) \cdot t^2 + a_{22} \cdot t^3$.

6.6 O Espaço Vetorial $\mathscr{L}(V,W)$

Dados V e W, espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, consideremos o **conjunto de todas as transformações lineares de V em W**, indicado por $\mathscr{L}(V,W)$, ou seja,

$$\mathscr{L}(V,W) = \{T : V \longrightarrow W;\ T \text{ é transformação linear}\}.$$

A seguir definimos a adição e a multiplicação por escalar em $\mathscr{L}(V,W)$.

Definição 6.6.1 **(i)** A **adição em** $\mathscr{L}(V,W)$: dados T e S em $\mathscr{L}(V,W)$, a soma de T e S, indicada por $T+S$, é a transformação definida por:

$$(T+S) : V \longrightarrow W \quad \text{com} \quad (T+S)(v) = T(v)+S(v) \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

(ii) A **multiplicação por escalar em** $\mathscr{L}(V,W)$: dados T em $\mathscr{L}(V,W)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, a multiplicação de λ por T, indicada por $\lambda \cdot T$, é a transformação definida por:

$$(\lambda \cdot T) : V \longrightarrow W \quad \text{com} \quad (\lambda \cdot T)(v) = \lambda \cdot T(v) \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Lema 6.6.1 Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, dados T e $S \in \mathscr{L}(V,W)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, as transformações $T+S$ e $\lambda \cdot T$ são transformações lineares de V em W.

Demonstração: Sejam u e v elementos quaisquer em V e $\alpha \in \mathbb{K}$ elemento arbitrário.

Como,

$$\begin{aligned}
(T+S)(u+\alpha\cdot v) &\overset{\text{def. } + \text{ em } \mathscr{L}(V,W)}{=} T(u+\alpha\cdot v) \ + \ S(u+\alpha\cdot v) \\
&\overset{T,\ S \in \mathscr{L}(V,W)}{=} T(u)+\alpha\cdot T(v) \ + \ S(u)+\alpha\cdot S(v) \\
&= T(u)+S(u) \ + \ \alpha\cdot\big(T(v)+S(v)\big) \\
&= (T+S)(u) \ + \ \alpha\cdot(T+S)(v)
\end{aligned},$$

segue que $T+S$ é transformação linear.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\lambda\cdot T)(u+\alpha\cdot v) &\overset{\text{def. } \cdot \text{ em } \mathscr{L}(V,W)}{=} \lambda\cdot T(u+\alpha\cdot v) \\
&\overset{T \in \mathscr{L}(V,W)}{=} \lambda\cdot\big(T(u)+\alpha\cdot T(v)\big) \\
&= \lambda\cdot T(u)+\lambda\cdot\big(\alpha\cdot T(v)\big) \\
&= \lambda\cdot T(u)+\alpha\cdot\big(\lambda\cdot T(v)\big) \\
&= (\lambda\cdot T)(u)+\alpha\cdot(\lambda\cdot T)(v)
\end{aligned}.$$

Consequentemente $\lambda \cdot T$ também é transformação linear. ■

Teorema 6.6.2 Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, então:

(i) O conjunto $\mathscr{L}(V,W)$, de todas as transformações lineares de V em W, com a adição e multiplicação por escalar definidas acima, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

(ii) Se V e W espaços vetoriais de dimensão finita, com $\dim V = n$ e $\dim W = m$, então $\dim \mathscr{L}(V,W) = n \cdot m$.

Demonstração:

(i) Devemos mostrar que a adição e a multiplicação por escalar em $\mathscr{L}(V,W)$ satisfazem as seguintes propriedades:

A_1 $T+S = S+T$ para quaisquer $T,\ S \in \mathscr{L}(V,W)$ (**comutatividade**).

A_2 $(T+S)+R = T+(S+R)$ para quaisquer $T,\ S,\ R \in \mathscr{L}(V,W)$ (**associatividade**).

A_3 A transformação linear nula $T_0 : V \longrightarrow W$, definida por $T_0(v) = 0_W$ para todo $v \in V$, é tal que

$$T + T_0 = T \quad \text{para todo} \quad T \in \mathscr{L}(V,W),$$

(**existência de elemento neutro**).

A_4 Para toda transformação linear $T \in \mathscr{L}(V,W)$, existe $-T : V \longrightarrow W$, definida por $(-T)(v) = -\big(T(v)\big)$ para todo $v \in V$, e esta é transformação linear, pois $-T = (-1)\cdot T$.

A transformação linear $-T$ é tal que $T + (-T) = T_0$ (**existência de elemento simétrico**).

M_1 $\alpha \cdot (\beta \cdot T) = (\alpha \cdot \beta) \cdot T$ para todo $T \in \mathscr{L}(V,W)$ e quaisquer $\alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$.

M_2 $\alpha \cdot (T+S) = \alpha \cdot T + \alpha \cdot S$ para quaisquer $T,\ S \in \mathscr{L}(V,W)$ e todo $\alpha \in \mathbb{K}$ (**distributividade da adição**).

M_3 $(\alpha+\beta)\cdot T = \alpha \cdot T + \beta \cdot T$ para todo $T \in \mathscr{L}(V,W)$ e quaisquer $\alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$ (**distributividade da multiplicação por escalar**).

M_4 $1_{\mathbb{K}} \cdot T = T$ para todo $T \in \mathscr{L}(V,W)$ (**existência de unidade**).

Cada uma dessas propriedades segue da propriedade correspondente das operações adição e multiplicação por escalar no espaço vetorial W.

Portanto, $\big(\mathscr{L}(V,W),\ +,\ \cdot\big)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

(ii) Sejam $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ base de V e $\mathscr{B}' = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ base de W.

Para cada i e cada j, com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$, denotamos por $T_{i,j}$ a única transformação linear $T_{i,j} : V \longrightarrow W$ tal que $T_{i,j}(v_k) = \begin{cases} w_j & \text{se} \quad k = i \\ 0 & \text{se} \quad k \neq i \end{cases}$, para todo $v_k \in \mathscr{B}$.

Observemos que se $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i$, então $T_{i,j}(v) = \alpha_i \cdot w_j$.

Mostremos que $\mathscr{B}_{\mathscr{L}(V,W)} = \big\{T_{i,j} \in \mathscr{L}(V,W);\ \text{com } 1 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq m\big\}$ é uma base de $\mathscr{L}(V,W)$.

- Se $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot T_{ij} = T_0$, transformação linear nula, segue da definição das transformações lineares T_{ij} que:

$$\begin{aligned} 0_W &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\cdot T_{ij}(v_k) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot T_{ij}(v_k) \\ &= \sum_{j=1}^{m}\left(a_{1j}\cdot T_{1j}(v_k)+\cdots+a_{kj}\cdot T_{kj}(v_k)+\cdots+a_{nj}\cdot T_{nj}(v_k)\right) . \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_{kj}\cdot T_{kj}(v_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{kj}\cdot w_j \end{aligned}$$

Como os vetores $w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_m$ são L. I., segue que $a_{k1}=\cdots=a_{km}=0$ para todo $k\in\{1,\ \cdots,\ n\}$.

Portanto, $\left\{T_{i,j}\in\mathscr{L}(V,W);\ \text{com } 1\le i\le n \text{ e } 1\le j\le m\right\}$ é um subconjunto L. I. de $\mathscr{L}(V,W)$.

- Seja $T\in\mathscr{L}(V,W)$ uma transformação linear qualquer de V em W, observemos que dado $v\in V$, como $\mathscr{B}=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ é base de V, existem únicos escalares $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ tais que $v=\alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+\cdots+\alpha_n\cdot v_n$.

  Logo,

  $$T(v)=T(\alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+\cdots+\alpha_n\cdot v_n)\overset{T\text{ é linear}}{=}\alpha_1\cdot T(v_1)+\alpha_2\cdot T(v_2)+\cdots+\alpha_n\cdot T(v_n).$$

  Por outro lado, como $\mathscr{B}'=\{w_1,w_2,\cdots,w_m\}$ é base de W, para cada $k\in\{1,\ \cdots,\ n\}$, existem únicos escalares $\lambda_{1k},\ \cdots,\ \lambda_{mk}$ tais que $T(v_k)=\lambda_{1k}\cdot w_1+\lambda_{2k}\cdot w_2+\cdots+\lambda_{mk}\cdot w_m$.

  Consequentemente,

  $$\begin{aligned} T(v) &= \alpha_1\cdot T(v_1)+\alpha_2\cdot T(v_2)+\cdots+\alpha_n\cdot T(v_n) \\ &= \alpha_1\cdot(\lambda_{11}\cdot w_1+\lambda_{21}\cdot w_2+\cdots+\lambda_{m1}\cdot w_m) \\ &+ \alpha_2\cdot(\lambda_{12}\cdot w_1+\lambda_{22}\cdot w_2+\cdots+\lambda_{m2}\cdot w_m) \\ &+ \cdots+\alpha_n\cdot(\lambda_{1n}\cdot w_1+\lambda_{2n}\cdot w_2+\cdots+\lambda_{mn}\cdot w_m) \\ &= (\alpha_1\cdot\lambda_{11}+\alpha_2\cdot\lambda_{12}+\cdots+\alpha_n\cdot\lambda_{1n})\cdot w_1 \\ &+ (\alpha_1\cdot\lambda_{21}+\alpha_2\cdot\lambda_{22}+\cdots+\alpha_n\cdot\lambda_{2n})\cdot w_2 \\ &+ \cdots+(\alpha_1\cdot\lambda_{m1}+\alpha_2\cdot\lambda_{m2}+\cdots+\alpha_n\cdot\lambda_{mn})\cdot w_m \quad . \\ &= \lambda_{11}\cdot(\alpha_1\cdot w_1)+\lambda_{12}\cdot(\alpha_2\cdot w_1)+\cdots+\lambda_{1n}\cdot(\alpha_n\cdot w_1) \\ &+ \lambda_{21}\cdot(\alpha_1\cdot w_2)+\lambda_{22}\cdot(\alpha_2\cdot w_2)+\cdots+\lambda_{2n}\cdot(\alpha_n\cdot w_2) \\ &+ \cdots+\lambda_{m1}\cdot(\alpha_1\cdot w_m)+\lambda_{m2}\cdot(\alpha_2\cdot w_m)+\cdots+\lambda_{mn}\cdot(\alpha_n\cdot w_m) \\ &= \lambda_{11}\cdot T_{11}(v)+\lambda_{12}\cdot T_{21}(v)+\cdots+\lambda_{1n}\cdot T_{n1}(v) \\ &+ \lambda_{21}\cdot T_{12}(v)+\lambda_{22}\cdot T_{22}(v)+\cdots+\lambda_{2n}\cdot T_{n2}(v) \\ &+ \cdots+\lambda_{m1}\cdot T_{1m}(v)+\lambda_{m2}\cdot T_{2m}(v)+\cdots+\lambda_{mn}\cdot T_{nm}(v) \end{aligned}$$

Logo,

$$\left[T_{11},\, T_{21},\, \cdots,\, T_{n1},\, T_{12},\, T_{22},\, \cdots,\, T_{n2}(v),\cdots,\, T_{1m},\, T_{2m},\, \cdots,\, T_{nm}\right] = \mathscr{L}(V,W).$$

Portanto, $\mathscr{B}_{\mathscr{L}(V,W)} = \left\{T_{i,j} \in \mathscr{L}(V,W);\ \text{com } 1 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq m\right\}$ é base de $\mathscr{L}(V,W)$ e $\dim \mathscr{L}(V,W) = n \cdot m$.

■

Observação 6.6.3 Sendo um V e W espaço vetoriais sobre $\mathbb{K}$ de dimensões finitas, dadas $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ bases de V e de W, respectivamente, se consideramos a transformação:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathscr{L}(V,W) & \longrightarrow & M_{m\times n}(\mathbb{K}) \\ & T & \longmapsto & \varphi(T) = [T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} \end{array},$$

podemos mostrar que φ é um isomorfismo linear.

Consequentemente, esta é uma maneira alternativa de mostrar o **Teorema 6.6.2 (ii)**.

Do que vimos sobre transformações lineares segue a seguinte proposição:

Proposição 6.6.4 Sejam V, W. U e Z espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, então:

(i) Se $T \in \mathscr{L}(V,W)$ e $S \in \mathscr{L}(W,U)$, então $S \circ T \in \mathscr{L}(V,U)$.

(ii) Se $T \in \mathscr{L}(V,W)$, $S \in \mathscr{L}(W,U)$ e $R \in \mathscr{L}(U,Z)$, então $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.

(iii) Se $T,\ S \in \mathscr{L}(V,W)$ e $R \in \mathscr{L}(W,U)$, então $R \circ (T+S) = R \circ T + R \circ S$.

(iv) Se $T \in \mathscr{L}(V,W)$, $I_V : V \longrightarrow V$ é identidade em V e $I_W : W \longrightarrow W$ é identidade em W, então $T \circ I_V = T \quad$ e $\quad I_W \circ T = T$.

6.6.1 O Espaço Dual $\mathscr{L}(V,\mathbb{K})$

Definição 6.6.2 Seja V espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, o **espaço dual de** V, denotado por $\mathscr{L}(V,\mathbb{K})$, é o espaço vetorial das transformações lineares de V em $\mathbb{K}$, ou seja,

$$\mathscr{L}(V,\mathbb{K}) = \left\{T : V \longrightarrow \mathbb{K};\ T \text{ é transformação linear}\right\}.$$

Corolário 6.6.5 Se V é espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ de dimensão finita n, então $\dim \mathscr{L}(V,\mathbb{K}) = n$.

Demonstração: De fato, pelo **Teorema 6.6.2 (ii)** segue que

$$\dim \mathscr{L}(V,\mathbb{K}) = n \times \dim \mathbb{K} = n \times 1 = n.$$

■

Observação 6.6.6 Pela demonstração do **Teorema 6.6.2 (ii)** segue que se $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é uma base de V, então a família de transformações lineares $T_1,\ \cdots,\ T_n : V \longrightarrow \mathbb{K}$ dadas por

$$T_k(v) = T_k(a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n) = a_k, \qquad \text{para} \qquad k \in \{1, \cdots, n\}$$

é tal que $\left\{T_1,\ \cdots,\ T_n\right\}$ é base de $\mathscr{L}(V,\mathbb{K})$, espaço dual de V, esta base é chamada **base dual** de $\mathscr{B}$.

Exemplo 6.6.7 Determine a base dual de $\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, base de $M_2(\mathbb{R})$.

Solução:

Dada $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, podemos escrever:

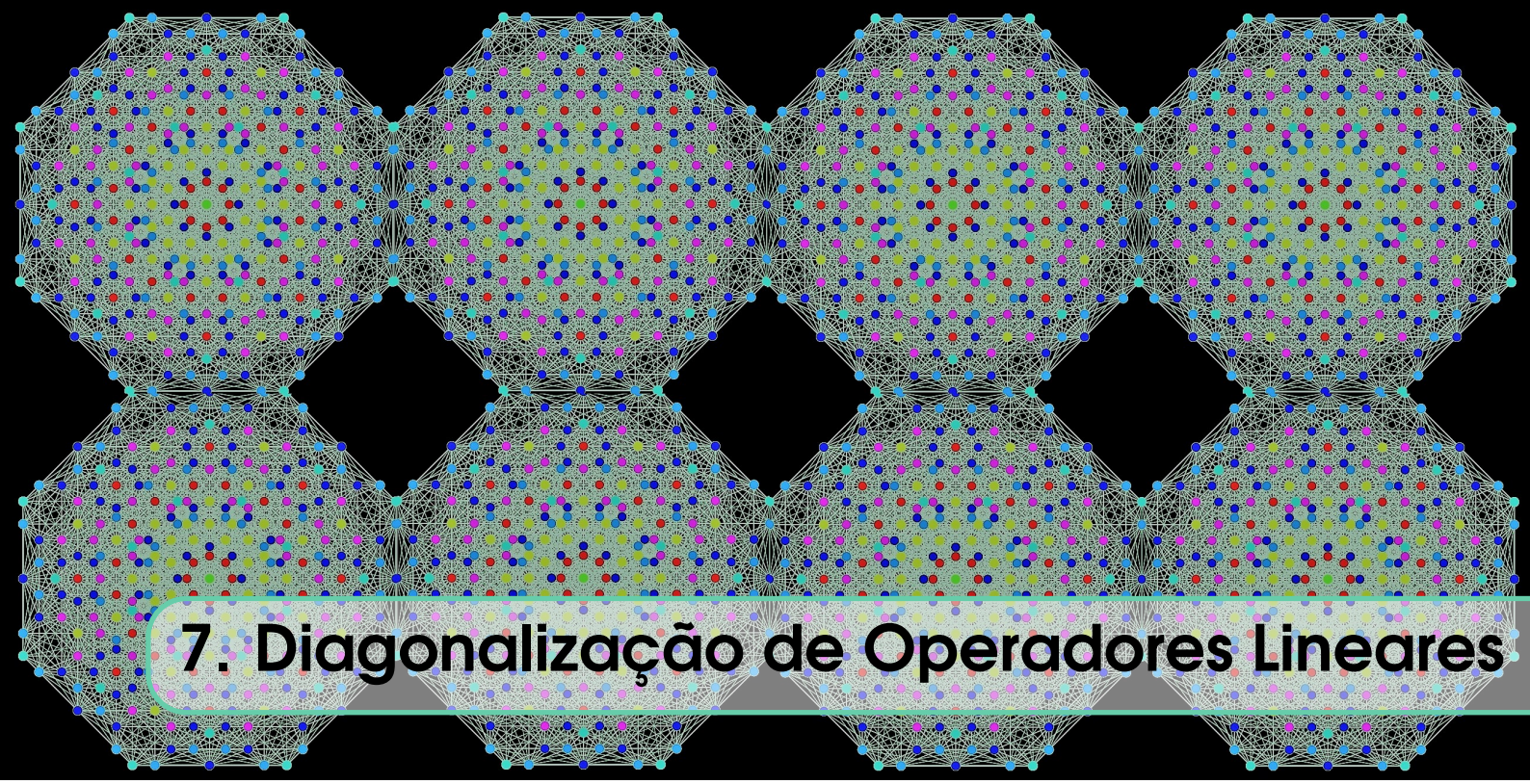
$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - (a_{11}+a_{12}) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + (a_{11}+a_{12}+a_{21}) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + (a_{12}+a_{21}+a_{22}) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}.$$

Logo, $\{T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4\}$, com

$$T_1\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11}, \qquad T_2\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = -a_{11} - a_{12},$$

$$T_3\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11}+a_{12}+a_{21}, \quad T_4\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{12}+a_{21}+a_{22}$$

é base dual da base $\mathscr{B}$.



7. Diagonalização de Operadores Lineares

7.1 Autovalor e Autovetor de um Operador Linear

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, dado um operador linear $T : V \longrightarrow V$ estamos interessados em vetores diferentes do vetor nulo que são levados por T em múltiplo de si mesmo, ou seja, procuramos $v \in V$, $v \neq 0_V$, tal que $T(v) = \lambda v$, com $\lambda \in \mathbb{K}$.

Assim temos a seguinte definição:

Definição 7.1.1 Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, dizemos que um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ é um **autovalor** ou **valor-próprio** de T, se e somente se, existe um vetor $v \in V$, $v \neq 0_V$, tal que $T(v) = \lambda v$.

Neste caso, o vetor $v \in V$ é chamado **autovetor** ou **vetor-próprio** de T associado ao escalar λ.

Exemplos 7.1.1 Determine os autovalores do operador T e os autovetores associados.

(a) **Reflexões no Plano**

(a_1) Reflexão em torno do eixo x: $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (x, -y)$

Solução:

$$T(x,y) = \lambda(x,y) \Longleftrightarrow (x,-y) = \lambda(x,y) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \lambda x \\ -y = \lambda y \end{cases}$$

1º Caso: Se $x \neq 0$, a única possível solução é $\lambda = 1$ e $y = 0$.

2º Caso: Se $y \neq 0$ devemos ter $\lambda = -1$ e $x = 0$.

Logo, os autovalores de T são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$.

- Os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$ são os vetores da forma $(x,0)$, com $x \neq 0$.
- Os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_2 = -1$ são os vetores da forma $(0,y)$, com $y \neq 0$.

(a_2) Reflexão pela bissetriz do 1 e 3 quadrantes: $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y)=(-x,\ -y)$

Solução:

$$T(x,y)=\lambda(x,y) \Longleftrightarrow (-x,-y)=\lambda(x,y) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -x=\lambda x \\ -y=\lambda y \end{array} \right. \Longleftrightarrow \lambda=-1.$$

Assim, o único autovalor de T é $\lambda_1=-1$ e os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_1=-1$ são os vetores da forma (x,y), com $x\neq 0$ ou $y\neq 0$.

(a_3) Reflexão em torno do eixo y: $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y)=(-x,\ y)$

Solução:

Analogamente ao exemplo (a_1) temos os autovalores de T são $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=-1$.

- Os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_1=1$ são os vetores da forma $(0,y)$, com $y\neq 0$.
- Os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_2=-1$ são os vetores da forma $(x,0)$, com $x\neq 0$.

(b) Seja o operador linear $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y)=(ax,\ by)$ com a e b número reais.

Solução:

$$T(x,y)=\lambda(x,y) \Longleftrightarrow (ax,by)=\lambda(x,y) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} ax=\lambda x \\ by=\lambda y \end{array} \right. .$$

1º Caso: Se $a=b$, então o único ao autovalor de T é $\lambda_1=a$ e os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_1=a$ são todos os vetores de $\mathbb{R}^2$, exceto $(0,0)$.

2º Caso: Se $a\neq b$ o operador T tem dois autovalores:
- Se $x\neq 0$, devemos ter $\lambda_1=a$ e $y=0$, neste caso os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_1=a$ são os vetores da forma $(x,0)$ com $x\neq 0$.
- Se $y\neq 0$, devemos ter $\lambda_2=b$ e $x=0$, neste caso os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_2=b$ são os vetores da forma $(0,y)$ com $y\neq 0$.

(c) Seja $A=\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right]$, o operador linear $T_A:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por: $T_A(x,y)=(x+y,\ 2y)$.

Solução:

$$T(x,y)=\lambda(x,y) \Longleftrightarrow (x+2y,\ y)=\lambda(x,y) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x+y=\lambda x \\ 2y=\lambda y \end{array} \right. .$$

1º Caso: Se $y\neq 0$, o autovalor de T é $\lambda_1=2$, neste caso teremos $x+y=2x \Longleftrightarrow x=y$.

Logo, os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_1=2$ são os vetores da forma (x,x), com $x\neq 0$.

2º Caso: Se $y=0$, o autovalor de T é $\lambda_2=1$ e os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_2=1$ são os vetores da forma $(x,0)$ com $x\neq 0$.

(d) Seja o operador linear $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $T(x,y,z)=(x+y+z,\ x+y,\ z)$.
Solução:

$$T(x,y,z)=\lambda(x,y,z) \Longleftrightarrow (x+y+z,\ x+y,\ z)=\lambda(x,y,z) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x+y+z=\lambda x \\ x+y=\lambda y \\ z=\lambda z \end{array} \right. .$$

1º Caso: Se $z \neq 0$, devemos ter $\lambda_1 = 1$, consequentemente devemos ter

$$\begin{cases} x+y+z=x \\ x+y=y \end{cases} \iff \begin{cases} y=-z \\ x=0 \end{cases}.$$

Logo, os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$ são os vetores da forma $(0,-z,z)$ com $z \neq 0$.

2º Caso: Se $z = 0$, devemos ter:

$$\begin{cases} x+y=\lambda x \\ x+y=\lambda y \end{cases} \iff \lambda x = \lambda y \iff \lambda x - \lambda y = 0 \iff \lambda(x-y) = 0$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ x-y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ x=y \end{cases}.$$

2º Caso A: Se x=y, então $x+x=\lambda x \iff 2x=\lambda x \overset{x\neq 0}{\Longrightarrow} \lambda = 2$.

Portanto, $\lambda_2 = 2$ é um autovalor de T e os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_2 = 2$ são os vetores da forma $(x,x,0)$ com $x \neq 0$.

2º Caso B: Se $\lambda = 0$, então $x+y=0$ e, portanto, $x=-y$.

Portanto, $\lambda_3 = 0$ é um autovalor de T e os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_3 = 0$ são os vetores da forma $(-y,y,0)$ com $y \neq 0$.

7.1.1 Autoespaço associado a um Autovalor

Teorema 7.1.2 Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear.

(i) Se v é um autovetor associado ao autovalor λ, então todo vetor não nulo $w = \alpha v$, com $\alpha \in \mathbb{K}$, também é um autovetor de T associado a λ.

(ii) Se v_1 e v_2 são autovetores associado ao autovalor λ, então $v_1 + v_2$ também é um autovetor de T associado a λ.

Demonstração:

(i) Como v é autovetor associado ao autovalor λ, então $T(v) = \lambda v$.

Assim,

$$T(w) = T(\alpha v) \overset{T \text{ é linear}}{=} \alpha T(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v) = \lambda w.$$

Portanto, w é autovetor associado ao autovalor λ.

(ii) Como v_1 e v_2 são autovetores associado ao autovalor λ, então, então $T(v_1) = \lambda v_1$ e $T(v_2) = \lambda v_2$. Logo,

$$T(v_1+v_2) \overset{T \text{ é linear}}{=} T(v_1) + T(v_2) = (\lambda v_1) + (\lambda v_2) = \lambda(v_1+v_2).$$

Portanto, $v_1 + v_2$ é autovetor associado ao autovalor λ.

■

Do **Teorema 7.1.2** acima concluímos que, dado um operador linear $T : V \longrightarrow V$ o conjunto de todos os autovetores de T associados a um autovalor junto com o vetor nulo é um subespaço de V, mais precisamente temos a seguinte definição:

Definição 7.1.2 Sejam $T : V \longrightarrow V$ um operador linear e λ um autovalor de V o subespaço

$$V_\lambda = \{v \in V;\ T(v) = \lambda v\}$$

é um subespaço de V chamado **autoespaço associado ao autovalor** λ.

Exemplos 7.1.3 Determine os autoespaços de V nos seguintes casos:

(a) **Reflexões no Plano**

(a_1) Reflexão em torno do eixo x:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (x,-y) \end{array}.$$

Solução:

Vimos que os autovalores de T são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, com autovetores das formas $(x,0)$ com $x \neq 0$ e $(0,y)$ com $y \neq 0$, respectivamente.

Logo, os autoespaços de $\mathbb{R}^2$ são:

$$V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\} \quad \text{e} \quad V_{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0\}.$$

(a_2) Reflexão pela bissetriz do 1 e 3 quadrantes:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (-x,-y) \end{array}.$$

Solução:

Vimos que o único autovalor de T é $\lambda_1 = -1$ com autovetores da forma (x,y), com $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.

Logo, o único autoespaço de $\mathbb{R}^2$ é $V_1 = \mathbb{R}^2$.

(a_3) Reflexão em torno do eixo y:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (-x,y) \end{array}.$$

Solução:

Vimos que os autovalores de T são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, com autovetores das formas $(0,y)$ com $y \neq 0$ e $(x,0)$ com $x \neq 0$, respectivamente.
Logo, os autoespaços de $\mathbb{R}^2$ são:

$$V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0\} \quad \text{e} \quad V_{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\}.$$

(b) Seja o operador linear

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (ax,by) \end{array}, \quad \text{com } a \text{ e } b \text{ números reais.}$$

Solução:

Vimos que:

1º Caso: Se $a = b$, então o único ao autovalor de T é $\lambda_1 = a$ e os autovetores são todos os vetores de $\mathbb{R}^2$, exceto $(0,0)$.

Logo, o único autoespaço de $\mathbb{R}^2$ é $V_a = \mathbb{R}^2$.

2º Caso: Se $a \neq b$, então os autovalores de T são $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = b$,com autovetores das formas $(x,0)$ com $x \neq 0$ e $(0,y)$ com $y \neq 0$, respectivamente.

Logo, os autoespaços de $\mathbb{R}^2$ são:

$$V_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\} \quad \text{e} \quad V_b = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0\}.$$

(c) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, o operador linear T_A é dado por:

$$\begin{array}{rccc} T_A: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T_A(x,y) = (x+y,\ 2y). \end{array}$$

Solução:

Vimos que os autovalores de T são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$, com autovetores das formas (x,x), com $x \neq 0$ e $(x,0)$ com $x \neq 0$, respectivamente.

Logo, os autoespaços de $\mathbb{R}^2$ são:

$$V_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x\} \quad \text{e} \quad V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\}.$$

(d) Seja o operador linear

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & T(x,y,z) = (x+y+z,\ x+y,\ z) \end{array}.$$

Solução:

Vimos que os autovalores de T são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, com autovetores das formas $(0,-z,z)$ com $z \neq 0$ e $(x,x,0)$ com $x \neq 0$.
Logo, os autoespaços de $\mathbb{R}^3$ são:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0 \text{ e } y = -z\} \quad \text{e} \quad V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ y = x \text{ e } z = 0\}.$$

Proposição 7.1.4 Se λ_1 e λ_2 são autovalores distintos de um operador linear $T: V \longrightarrow V$ um operador linear, então

$$V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{0_V\}.$$

Demonstração:

$$v \in V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} T(v) = \lambda_1 v \\ T(v) = \lambda_2 v \end{array} \right. \Longleftrightarrow \lambda_1 v = \lambda_2 v \Longleftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)v = 0_V \overset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\Longrightarrow} v = 0_V.$$

Portanto, $V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{0_V\}$. ■

Definição 7.1.3 Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, de dimensão finita n, e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Dado λ_i um autovalor de T a **multiplicidade geométrica** de de λ_i é a dimensão do autoespaço V_{λ_i}.

Notação: $m_G(\lambda_i)$.

Nos exemplos acima todos os autovalores têm multiplicidade geométrica igual a 1.

7.2 Polinômio Característico de um Operador Linear

Na seção anterior obtemos em alguns exemplos os autovalores e os autovetores de um operador linear. No entanto o procedimento adotado não é, de modo geral eficiente. Assim vamos utilizar a forma matricial do operador para fazer isto, porém antes devemos justificar porque podemos considerar qualquer matriz do operador.

7.2.1 Polinômio Característico de uma Matriz

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, um vetor $v \in V$, não nulo, é autovetor de T se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T(v) = \lambda v$, mas

$$T(v) = \lambda v \iff T(v) - \lambda I_d(v) = 0_V \iff (T - \lambda I_d)(v) = 0_V$$

$$\iff v \in \ker(T - \lambda I_d) \overset{v \neq 0_V}{\Longrightarrow} \ker(T - \lambda I) \neq \{0_V\},$$

com $I_d : V \longrightarrow V$ o operador identidade dado por $I_d(v) = v$, observemos que para $\mathscr{B}$ base qualquer de V a matriz $[I_d]_{\mathscr{B}} = I_n$ a matriz identidade de ordem n.

Dada $\mathscr{B}$ uma base de V e $A = [T]_{\mathscr{B}}$ a matriz de T em relação à base $\mathscr{B}$, dizer que $\ker(T - \lambda I) \neq \{0_V\}$ é equivalente que o sistema linear homogêneo:

$$(A - \lambda I_n) \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem solução não trivial, por sua vez isto é equivalente a dizer que $\det\left(A - \lambda I_n\right) = 0$, com I_n a matriz identidade de ordem n.

Definição 7.2.1 Seja A uma matriz em $M_n(\mathbb{K})$ dizemos que um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ é **autovalor** de A se, e somente se, $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Definição 7.2.2 Seja A uma matriz em $M_n(\mathbb{K})$ o polinômio em λ dado por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

é chamado **polinômio característico** de A.

Teorema 7.2.1 Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, as matrizes de T em relação a bases distintas têm o mesmo polinômio característico.

Demonstração: Vamos mostrar um resultado mais geral, que se A e B são semelhantes, então têm o mesmo polinômio característico.

De fato, se A e B são semelhantes, então existe P uma matriz invertível tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Logo,

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_n) = \det\left(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P\right) = \det\left(P^{-1}(A - \lambda I_n)P\right)$$

$$= \det P^{-1} \det(A - \lambda I_n) \det P = \det(A - \lambda I_n) = p_A(\lambda),$$

pois $\det P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}$.

Vimos no **Teorema 6.2.9** que, $[T]_{\mathscr{B}}$ e $[T]_{\mathscr{B}'}$, matrizes de T em relação a bases distintas $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ são matrizes semelhantes, pois $[T]_{\mathscr{B}} = M \cdot [T]_{\mathscr{B}'} \cdot M^{-1}$, com $M = M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ e $M^{-1} = M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ matrizes mudança de base de $\mathscr{B}'$ para $\mathscr{B}$ e de $\mathscr{B}$ para $\mathscr{B}'$, respectivamente.

Portanto, utilizando esse resultado e o desenvolvimento acima segue que $p\left([T]_{\mathscr{B}}\right) = p\left([T]_{\mathscr{B}'}\right)$, quaisquer que sejam $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ as bases de V.

■

Assim, temos a seguinte definição:

Definição 7.2.3 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, o **polinômio característico** de T, denotado por $p(\lambda)$ ou $p_T(\lambda)$, é o polinômio característico da matriz $[T]_{\mathscr{B}}$, com $\mathscr{B}$ uma base ordenada qualquer de V, ou seja,

$$p(\lambda) = \det\left([T]_{\mathscr{B}} - \lambda I_n\right).$$

Das considerações acima concluímos:

Teorema 7.2.2 Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, então:

(i) Os autovalores do operador T são as raízes de seu polinômio característico $p(\lambda)$.

(ii) Se λ_i é um autovalor de T, então o autoespaço V_{λ_i}, associado a este autovalor, é o subespaço $\ker(A - \lambda_i I_n)$.

Observação 7.2.3 O **Teorema 7.2.2** nos fornece o procedimento prático para determinar os autovalores, os autovetores e os autoespaços de um operador linear T:

1º Obtemos $p(\lambda)$ o polinômio característico de T.

2º Encontramos as raízes de $p(\lambda)$, que são os autovalores de T.

3º Para cada autovalor λ_i determinamos o autoespaço V_{λ_i}, que é o subespaço $\ker(A - \lambda_i I_n)$.

Exemplos 7.2.4 Determine os autovalores e os autoespaços do operador T nos seguintes casos:

(a) T operador sobre $\mathbb{R}^2$.

(a_1) $T(x,y) = (y,\ 9x)$.

(a_2) $T(x,y) = (-y,\ x)$.

Solução:

(a_1) Consideremos $\mathscr{B}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$, então:

$$T(1,0) = (0,9) \quad \text{e} \quad T(0,1) = (1,0).$$

Logo, a matriz de A de T em relação à base $\mathscr{B}$ é $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$.

Portanto, o polinômio característico de T é dado por:

$$p(\lambda) = p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 9 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 9.$$

É claro que

$$p(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - 9 = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 = 9 \Longleftrightarrow \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = -3.$$

Logo, os autovalores de T são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -3$.

Determinando os autoespaços V_3 e V_{-3}.

$$(x,y) \in V_3 \Longleftrightarrow (x,y) \in \ker(A - 3I_2) = \ker \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -3x + y = 0 \\ 9x - 3y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow y = 3x.$$

Portanto, $V_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 3x\} = \big[(1,\ 3)\big]$.

$$(x,y) \in V_{-3} \Longleftrightarrow (x,y) \in \ker(A + 3I_2) = \ker \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 9x + 3y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow y = -3x.$$

Portanto, $V_{-3} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = -3x\} = \big[(1,\ -3)\big]$.

(a_2) Consideremos $\mathscr{B}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$, então:

$$T(1,0) = (0,1) \quad \text{e} \quad T(0,1) = (-1,0).$$

Logo, a matriz de A de T em relação à base $\mathscr{B}$ é $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Portanto, o polinômio característico de T é dado por:

$$p(\lambda) = p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

É claro que

$$p(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0, \Longleftrightarrow \lambda^2 = -1 \Longleftrightarrow \lambda = i \text{ ou } \lambda = -i.$$

Mas $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e i e $-i$ não são números reais.

Portanto, T não tem autovalores e autovetores e $\mathbb{R}^2$ não tem autoespaços determinados por este operador.

(b) T operador sobre $\mathbb{R}^3$.

(b_1) $T(x,y,z) = (x,\ y,\ x)$.

(b_2) $T(x,y,z) = (x+z,\ y+z,\ x+y+2z)$.

(b_3) $T(1,1,1) = (4,9,-4)$, $T(0,1,1) = (2,7,-3)$, $T(0,0,1) = (1,4,-2)$.

Solução:

(b_1) Consideremos $\mathscr{B}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$, então:

$$T(1,0,0) = (1,0,1), \quad T(0,1,0) = (0,1,0) \quad \text{e} \quad T(0,0,1) = (0,0,0).$$

Logo, a matriz de A de T em relação à base $\mathscr{B}$ é $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Portanto, o polinômio característico de T é dado por:

$$p(\lambda) = p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(-\lambda) = -\lambda(1-\lambda)^2.$$

É claro que

$$p(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow -\lambda(1-\lambda)^2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ (1-\lambda)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ 1-\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1.$$

Logo, os autovalores de T são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$.

Determinando os autoespaços V_0 e V_1.

$$(x,y,z) \in V_0 \Longleftrightarrow (x,y,z) \in \ker(A - 0I_3) = \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = y = 0.$$

Portanto, $V_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = y = 0\} = \big[(0,\ 0,\ 1)\big]$.

$$(x,y,z) \in V_1 \Longleftrightarrow (x,y,z) \in \ker(A - 1I_3) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow x - z = 0 \Longleftrightarrow z = x.$$

Portanto, $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x\} = \big[(1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 0)\big]$.

(b_2) Consideremos $\mathscr{B}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$, então:

$$T(1,0,0) = (1,0,1), \quad T(0,1,0) = (0,1,1) \quad \text{e} \quad T(0,0,1) = (1,0,2).$$

Logo, a matriz de A de T em relação à base $\mathscr{B}$ é $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Portanto, o polinômio característico de T é dado por:

$$p(\lambda)=p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{bmatrix}=(1-\lambda)^2(2-\lambda)-2(1-\lambda)$$

$$=(1-\lambda)\big((1-\lambda)(2-\lambda)-2\big)=(1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2-2)=(1-\lambda)\lambda(\lambda-3).$$

É claro que

$$p(\lambda)=0\Longleftrightarrow(1-\lambda)\lambda(\lambda-3)=0\Longleftrightarrow\begin{cases}1-\lambda=0\\ \lambda=0\\ \lambda-3=0\end{cases}\Longleftrightarrow\lambda=1,\ \lambda=0\ \text{ ou }\ \lambda=3.$$

Logo, os autovalores de T são $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$ e $\lambda_3=3$.

Determinando os autoespaços V_1, V_0 e V_3.

$$(x,y,z)\in V_1\Longleftrightarrow(x,y,z)\in\ker(A-1I_3)=\ker\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Longleftrightarrow\begin{cases}z=0\\ x+y=0\end{cases}\Longleftrightarrow z=0\ \text{ e }\ y=-x.$$

Portanto, $V_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ z=0\ \text{ e }\ y=-x\}=\big[(1,\,-1,\,0)\big]$.

$$(x,y,z)\in V_0\Longleftrightarrow(x,y,z)\in\ker(A-0I_3)=\ker\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}\Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Longleftrightarrow\begin{cases}x+z=0\\ y+z=0\\ x+y+2z=0\end{cases}\Longleftrightarrow x=-z\ \text{ e }\ y=-z.$$

Portanto, $V_0=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x=-z\ \text{ e }\ y=-z\}=\big[(-1,\,-1,\,1)\big]$.

$$(x,y,z)\in V_3\Longleftrightarrow(x,y,z)\in\ker(A-3I_3)=\ker\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&-2&1\\1&1&-1\end{bmatrix}\Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&-2&1\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Longleftrightarrow\begin{cases}-2x+z=0\\ -2y+z=0\\ x+y-z=0\end{cases}\Longleftrightarrow x=y\ \text{ e }\ z=2x.$$

Portanto, $V_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x=y\ \text{ e }\ z=2x\}=\big[(1,\,1,\,2)\big]$.

(b_3) Consideremos a base $\mathscr{B}=\{(1,1,1),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, então para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ temos:

$$(x,y,z)=x(1,1,1)+(y-x)(0,1,1)+(z-y)(0,0,1)\Longleftrightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}_{\mathscr{B}}=\begin{bmatrix}x\\y-x\\z-y\end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (4,9,-4) = 4\,(1,1,1)+5\,(0,1,1)-13\,(0,0,1) \\ T(0,1,1) &= (2,7,-3) = 2\,(1,1,1)+5\,(0,1,1)-10\,(0,0,1)\ . \\ T(0,0,1) &= (1,4,-2) = 1\,(1,1,1)+3\,(0,1,1)-6\,(0,0,1) \end{aligned}$$

Portanto, a matriz de A de T em relação à base $\mathscr{B}$ é $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 3 \\ -13 & -10 & -6 \end{bmatrix}$.

Consequentemente, o polinômio característico de T é dado por:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 5 & 5-\lambda & 3 \\ -13 & -10 & -6-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (4-\lambda)(5-\lambda)(-6-\lambda) - 78 - 50 + 13(5-\lambda) + 30(4-\lambda) + 10(6+\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 = (\lambda-1)(-\lambda^2+2\lambda+3) \\ &= (1-\lambda)(1+\lambda)(3-\lambda). \end{aligned}$$

É claro que

$$p(\lambda)=0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(1+\lambda)(3-\lambda)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\lambda=0 \\ 1+\lambda=0 \\ 3-\lambda=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \lambda=1,\ \lambda=-1 \text{ ou } \lambda=3.$$

Logo, os autovalores de T são $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$ e $\lambda_3=3$.

Determinando os autoespaços V_1, V_{-1} e V_3.

$$(x,y,z)\in V_1 \Longleftrightarrow (x,y,z)\in \ker(A-1I_3) = \ker \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ -13 & -10 & -7 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ -13 & -10 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ -13 & -10 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y-x \\ z-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ -3x - 3y - 7z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow z=0 \ \text{ e } \ y=-x.$$

Portanto, $V_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ z=0 \ \text{ e } \ y=-x\} = [(1,-1,0)]$.

$$(x,y,z)\in V_{-1} \Longleftrightarrow (x,y,z)\in \ker(A+1I_3) = \ker \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \\ -13 & -10 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \\ -13 & -10 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \\ -13 & -10 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y-x \\ z-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ -x + 3y + 3z = 0 \\ -3x - 5y - 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ -x + 3y + 3z = 0 \\ 12x = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = 0 \text{ e } z = -y.$$

Portanto,

$$V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0 \text{ e } z = -y\} = [(0,1,-1)].$$

$$(x,y,z) \in V_3 \iff (x,y,z) \in \ker(A - 3I_3) = \ker \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ -13 & -10 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ -13 & -10 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ -13 & -10 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y-x \\ z-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ -3x + y - 9z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2y + 6z = 0 \\ -4y - 12z = 0 \end{cases}$$

$$\iff y = -3z \text{ e } x = -2z.$$

Portanto, $V_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ y = -3z \text{ e } x = -2z\} = [(-2,-3,1)]$.

(c) T operador sobre $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

(c_1) $T\big(p(t)\big) = p(0) + p(1)(t+t^2)$.

(c_2) $T\big(p(t)\big) = (1+t)p'(t) + p''(t)$.

(c_3) $T(a_0 + a_1t + a_2t^2) = (2a_1 + a_2) + (3a_0 - a_1 - a_2)t + 2a_2t^2$.

Solução:

(c_1) Seja $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ um elemento arbitrário de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, então

$$p(0) = a_0 \text{ e } p(1) = a_0 + a_1 + a_2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} T\big(p(t)\big) &= p(0) + p(1)(t+t^2) = a_0 + (a_0+a_1+a_2)(t+t^2) \\ &= a_0 + (a_0+a_1+a_2)\,t + (a_0+a_1+a_2)\,t^2. \end{aligned}$$

Consideremos $\mathscr{B} = \{1,\ t,\ t^2\}$ a base canônica de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, então:

$$T(1) = 1 + t + t^2, \quad T(t) = t + t^2 \text{ e } T(t^2) = t + t^2.$$

Logo, a matriz de A de T em relação à base $\mathscr{B}$ é $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Portanto, o polinômio característico de T é dado por:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_3) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)^3-(1-\lambda) = (1-\lambda)\big((1-\lambda)^2-1\big) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1-1) = (1-\lambda)\lambda(\lambda-2). \end{aligned}$$

É claro que

$$p(\lambda)=0 \Longleftrightarrow (1-\lambda)\lambda(\lambda-2)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 1-\lambda=0 \\ \lambda=0 \\ \lambda-2=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \lambda=1,\ \lambda=0 \text{ ou } \lambda=2.$$

Logo, os autovalores de T são $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$ e $\lambda_3=2$.

Determinando os autoespaços V_1, V_0 e V_2.

$$p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2 \in V_1 \Longleftrightarrow a_0+a_1t+a_2t^2 \in \ker(A-1I_3) = \ker\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0+a_1t+a_2t^2 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_2 = 0 \\ a_0 + a_1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow a_1=-a_0 \text{ e } a_2=-a_0.$$

Portanto, $V_1=\{p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R});\ a_1=-a_0 \text{ e } a_2=-a_0\}=[1-t-t^2]$.

$$p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2 \in V_0 \Longleftrightarrow a_0+a_1t+a_2t^2 \in \ker(A-0I_3) = \ker\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0+a_1t+a_2t^2 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 + a_1 - a_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow a_0=0 \text{ e } a_2=-a_1.$$

Portanto, $V_0=\{p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R});\ a_0=0 \text{ e } a_2=-a_1\}=[t-t^2]$.

$$p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2 \in V_2 \Longleftrightarrow a_0+a_1t+a_2t^2 \in \ker(A-0I_3) = \ker\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \left[\ a_0+a_1t+a_2t^2\ \right]_{\mathscr{B}} = \left[\ 0\ \right]_{\mathscr{B}}$$

$$\iff \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -a_0 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 + a_1 - a_2 = 0 \end{cases} \iff a_0 = 0 \ \text{ e } \ a_2 = a_1.$$

Portanto, $V_2 = \{p(t) = a_0+a_1t+a_2t^2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R});\ a_0 = 0 \ \text{ e } \ a_2 = a_1\} = [t+t^2]$.

(c$_2$) Seja $p(t) = a_0+a_1t+a_2t^2$ um elemento arbitrário de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, então $p'(t) = a_1+2a_2t$ e $p''(t) = 2a_2$.

Logo,

$$T\big(p(t)\big) = (1+t)p'(t)+p''(t) = (1+t)(a_1+2a_2t)+2a_2 = (a_1+2a_2)+(a_1+2a_2)t+2a_2t^2.$$

Consideremos $\mathscr{B} = \{1,\ t,\ t^2\}$ a base canônica de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, então:

$$T(1) = 0, \quad T(t) = 1+t \ \text{ e } \ T(t^2) = 2+2t+2t^2.$$

Logo, a matriz de A de T em relação à base $\mathscr{B}$ é $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Portanto, o polinômio característico de T é dado por:

$$p(\lambda) = p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda).$$

É claro que

$$p(\lambda) = 0 \iff -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \iff \begin{cases} -\lambda = 0 \\ 1-\lambda = 0 \\ 2-\lambda = 0 \end{cases} \iff \lambda = 0, \ \ \lambda = 1 \ \text{ ou } \ \lambda = 2.$$

Logo, os autovalores de T são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$.

Determinando os autoespaços V_0, V_1 e V_2.

$$p(t) = a_0+a_1t+a_2t^2 \in V_0 \iff a_0+a_1t+a_2t^2 \in \ker(A-0I_3) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \left[\ a_0+a_1t+a_2t^2\ \right]_{\mathscr{B}} = \left[\ 0\ \right]_{\mathscr{B}} \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0 \\ 2a_2 = 0 \end{cases} \iff a_1 = a_2 = 0.$$

Portanto, $V_0 = \{p(t) = a_0+a_1t+a_2t^2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R});\ a_1 = a_2 = 0\} = [1]$.

$$p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2\in V_1\Longleftrightarrow a_0+a_1t+a_2t^2\in\ker(A-1I_3)=\ker\begin{bmatrix}-1&1&2\\0&0&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{bmatrix}-1&1&2\\0&0&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0+a_1t+a_2t^2\end{bmatrix}_{\mathscr{B}}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}_{\mathscr{B}}\Longleftrightarrow\begin{bmatrix}-1&1&2\\0&0&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}-a_0+a_1+2a_2=0\\2a_2=0\\a_2=0\end{cases}\Longleftrightarrow a_2=0\ \text{ e }\ a_1=a_0.$$

Portanto, $V_1=\{p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2\in\mathscr{P}_2(\mathbb{R});\ a_2=0\ \text{ e }\ a_1=a_0\}=[1+t]$.

$$p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2\in V_2\Longleftrightarrow a_0+a_1t+a_2t^2\in\ker(A-0I_3)=\ker\begin{bmatrix}-2&1&2\\0&-1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{bmatrix}-2&1&2\\0&-1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0+a_1t+a_2t^2\end{bmatrix}_{\mathscr{B}}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}_{\mathscr{B}}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{bmatrix}-2&1&2\\0&-1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}-2a_0+a_1+2a_2=0\\-a_1+2a_2=0\end{cases}\Longleftrightarrow a_1=2a_2\ \text{ e }\ a_0=2a_2.$$

Portanto, $V_2=\{p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2\in\mathscr{P}_2(\mathbb{R});\ a_1=2a_2\ \text{ e }\ a_0=2a_2\}=[2+2t+t^2]$.

(c_3) Consideremos $\mathscr{B}=\{1,\ t,\ t^2\}$ a base canônica de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, então:

$$T(1)=3t,\quad T(t)=2-t\ \text{ e }\ T(t^2)=1-t+2t^2.$$

Logo, a matriz de A de T em relação à base $\mathscr{B}$ é $A=\begin{bmatrix}0&2&1\\3&-1&-1\\0&0&2\end{bmatrix}$.

Portanto, o polinômio característico de T é dado por:

$$\begin{aligned}p(\lambda)&=p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=\det\begin{bmatrix}-\lambda&2&1\\3&-1-\lambda&-1\\0&0&2-\lambda\end{bmatrix}\\&=\lambda(1+\lambda)(2-\lambda)-6(2-\lambda)=(2-\lambda)(\lambda^2+\lambda-6)\\&=(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+3)=-(\lambda-2)^2(\lambda+3).\end{aligned}$$

É claro que

$$p(\lambda)=0\Longleftrightarrow-(\lambda-2)^2(\lambda+3)=0\Longleftrightarrow\begin{cases}(\lambda-2)^2=0\\\lambda+3=0\end{cases}\Longleftrightarrow\lambda=2,\ \text{ ou }\ \lambda=-3.$$

Logo, os autovalores de T são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$.

Determinando os autoespaços V_2 e V_{-3}.

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in V_2 \Longleftrightarrow a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \ker(A - 2I_3) = \ker \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left[\ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \ \right]_{\mathscr{B}} = \left[\ 0 \ \right]_{\mathscr{B}}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -2a_0 + 2a_1 + a_2 = 0 \\ 3a_0 - 3a_1 - a_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -2a_0 + 2a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 - a_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow a_1 = a_0 \text{ e } a_2 = 0.$$

Portanto, $V_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R});\ a_1 = a_0 \text{ e } a_2 = 0\} = [1+t]$.

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in V_{-3} \Longleftrightarrow a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \ker(A + 3I_3) = \ker \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \left[\ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \ \right]_{\mathscr{B}} = \left[\ 0 \ \right]_{\mathscr{B}} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3a_0 + 2a_1 + a_2 = 0 \\ 3a_0 + 2a_1 - a_2 = 0 \\ 5a_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow a_1 = \frac{3}{2} a_0 \text{ e } a_2 = 0.$$

Portanto, $V_{-3} = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R});\ a_1 = \frac{3}{2} a_0 \text{ e } a_2 = 0.\} = [2+3t]$.

(d) T operador sobre $\mathbb{R}^4$.

(d_1) $T(x,y,z,w) = (x+y,\ y,\ 2z+w,\ 2z+w)$.

(d_2) A matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$ é: $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução:

(d_1) Consideremos $\mathscr{B}$ a base canônica de $\mathbb{R}^4$, então:

$$T(1,0,0,0) = (1,0,0,0), \qquad T(0,1,0,0) = (1,1,0,0)$$

$$T(0,0,1,0) = (0,0,2,2) \quad \text{e} \quad T(0,0,0,1) = (0,0,1,1).$$

Logo, a matriz de A de T em relação à base $\mathscr{B}$ é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Portanto, o polinômio característico de T é dado por:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_3) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)\big((1-\lambda)^2(2-\lambda)-2(1-\lambda)\big) \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda)\big((1-\lambda)(2-\lambda)-2\big) = (1-\lambda)^2\lambda(\lambda-3). \end{aligned}$$

É claro que

$$p(\lambda)=0 \Longleftrightarrow (1-\lambda)^2\lambda(\lambda-3)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)^2=0 \\ \lambda=0 \\ \lambda-3=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \lambda=1,\ \ \lambda=0 \ \ \text{ou} \ \ \lambda=3.$$

Logo, os autovalores de T são $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$ e $\lambda_3=3$.

Determinando os autoespaços V_1, V_0 e V_3.

$$(x,y,z,w)\in V_1 \Longleftrightarrow (x,y,z,w)\in \ker(A-1I_4)=\ker\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z+w=0 \\ 2z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow y=z=w=0.$$

Portanto, $V_1=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4;\ y=z=w=0\}=\big[(1,\ 0,\ 0,\ 0)\big]$.

$$(x,y,z,w)\in V_0 \Longleftrightarrow (x,y,z,w)\in \ker(A-0I_4)=\ker\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y=0 \\ 2z+w=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=y=0 \\ w=-2z \end{cases}.$$

Portanto,

$$V_0=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4;\ x=y=0\ \text{ e }\ w=-2z\}=\big[(0,\ 0,\ 1,\ -2)\big].$$

$$(x,y,z,w)\in V_3 \Longleftrightarrow (x,y,z,w)\in \ker(A-3I_4)=\ker\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -2x+y=0 \\ -2y=0 \\ -z+w=0 \\ 2z-2w=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ w=z \end{cases}.$$

Portanto,

$$V_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^4;\ x=y=0 \text{ e } w=z\} = \big[(0,\ 0,\ 1,\ 1)\big].$$

(d$_2$) Como a matriz de A de T em relação à base $\mathscr{B}$ é $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, então o polinômio característico de T é dado por:

$$p(\lambda) = p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1-\lambda & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$-2 \begin{vmatrix} -4 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -4 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)\Big((-1-\lambda)(1-\lambda)^2 - 8 + 8\lambda\Big) + 4(36-4\lambda^2) - 2(18-2\lambda^2) + 2(-18+4\lambda^2)$$

$$= \lambda^4 - 18\lambda^2 + 81 = (\lambda^2-9)^2 = (\lambda-3)^2(\lambda+3)^2.$$

É claro que

$$p(\lambda) = 0 \iff (\lambda-3)^2(\lambda+3)^2 = 0 \iff \begin{cases} (\lambda-3)^2 = 0 \\ (\lambda+3)^2 = 0 \end{cases} \iff \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = -3.$$

Logo, os autovalores de T são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -3$.

Determinando os autoespaços V_3 e V_{-3}.

$$(x,y,z,w) \in V_3 \iff (x,y,z,w) \in \ker(A - 3I_4) = \ker \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -4x-4y-2z-2w=0 \\ 2x+2y-2z+4w=0 \\ 2x+2y+4z-2w=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3z-3w=0 \end{cases} \iff \begin{cases} w=z \\ x=-y-z \end{cases}.$$

Portanto, $V_3 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4;\ z=w \text{ e } x=-y-z\} = \big[(-1,\ 1,\ 0,\ 0),\ (-1,\ 0,\ 1,\ 1)\big]$.

$$(x,y,z,w) \in V_{-3} \iff (x,y,z,w) \in \ker(A+3I_4) = \ker \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x-4y-2z-2w=0 \\ -4x+2y-2z-2w=0 \\ 2x+2y+4z+4w=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-2y-z-w=0 \\ 3x-3y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=y \\ z=-x-w \end{cases}$$

Portanto, $V_{-3} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4;\ y=x \text{ e } z=-x-w\} = \big[(1,\ 1,\ -1,\ 0),\ (0,\ 0,\ -1,\ 1)\big]$.

(e) T operador sobre $M_2(\mathbb{R})$.

(e_1) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2a+b & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$.

(e_2) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a+b & b \\ 0 & c-a-b \end{bmatrix}$.

Solução:

(e_1) Consideremos $\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$, então:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz de A de T em relação à base $\mathscr{B}$ é $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Portanto, o polinômio característico de T é dado por:

$$p(\lambda) = p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_4) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^4.$$

É claro que

$$p(\lambda)=0 \Longleftrightarrow (2-\lambda)^4=0 \Longleftrightarrow \lambda=2.$$

Logo, o único autovalor de T é $\lambda_1=2$.

Determinando o autoespaço V_2.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V_2 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \ker(A-2I_4)=\ker \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow b=0.$$

Portanto, $V_2=\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ b=0 \right\} = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$.

(e$_2$) Consideremos $\mathscr{B}=\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$, então:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz de A de T em relação à base $\mathscr{B}$ é $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Portanto, o polinômio característico de T é dado por:

$$p(\lambda)=p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_4)=\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2(1-\lambda)^2.$$

É claro que

$$p(\lambda)=0 \Longleftrightarrow \lambda^2(1-\lambda)^2=0 \Longleftrightarrow \lambda=0 \text{ ou } \lambda=1.$$

Logo, os autovalores de T são $\lambda_1=0$ e $\lambda_2=1$.

Determinando os autoespaços V_0 e V_1.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V_0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \ker(A-0I_4)=\ker \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b=0 \\ -a-b+c=0 \end{cases} \Longleftrightarrow a=b=c=0.$$

Portanto,

$$V_0=\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ a=b=c=0 \right\} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right].$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V_1 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \ker(A-1I_4)=\ker \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ -c=0 \\ -a-b+c-d=0 \end{cases} \Longleftrightarrow b=c=0 \text{ e } d=-a.$$

Portanto, $V_1=\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ b=c=0 \text{ e } d=-a \right\} = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right]$.

(f) T operador sobre $\mathbb{C}^2$.

(f_1) $T(z,w)=(-w,\ z)$.

(f_2) $T(z,w)=(4z+2iw,\ -2iz+4w)$.

Solução:

(f_1) Consideremos $\mathscr{B} = \{(1,\ 0),\ (0,\ 1)\}$ a base canônica de $\mathbb{C}^2$, então:

$$T(1,\ 0) = (0,\ 1) \quad \text{e} \quad T(0,\ 1) = (-1,\ 0).$$

Logo, a matriz de A de T em relação à base $\mathscr{B}$ é $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Portanto, o polinômio característico de T é dado por:

$$p(\lambda) = p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

É claro que

$$p(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 = -1 \Longleftrightarrow \lambda = i \quad \text{ou} \quad \lambda = -i.$$

Logo, os autovalores de T são $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$.

Determinando os autoespaços V_i e V_{-i}.

$$(z,w) \in V_i \Longleftrightarrow (z,w) \in \ker(A - iI_2) = \ker \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -iz - w = 0 \\ z - iw = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow w = -iz.$$

Portanto, $V_i = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2;\ w = -iz\} = \big[(1,\ -i)\big]$.

$$(z,w) \in V_{-i} \Longleftrightarrow (z,w) \in \ker(A + iI_2) = \ker \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} iz - w = 0 \\ z + iw = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow w = iz.$$

Portanto, $V_{-i} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2;\ w = iz\} = \big[(1,\ i)\big]$.

(f_2) Consideremos $\mathscr{B} = \{(1,\ 0),\ (0,\ 1)\}$ a base canônica de $\mathbb{C}^2$, então:

$$T(1,\ 0) = (4,\ -2i) \quad \text{e} \quad T(0,\ 1) = (2i,\ 4).$$

Logo, a matriz de A de T em relação à base $\mathscr{B}$ é $A = \begin{bmatrix} 4 & 2i \\ -2i & 4 \end{bmatrix}$.

Portanto, o polinômio característico de T é dado por:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2i \\ -2i & 4-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (4-\lambda)^2 + 4i^2 = \lambda^2 - 8\lambda + 16 - 4 \\ &= \lambda^2 - 8\lambda + 12 = (\lambda - 2)(\lambda - 6). \end{aligned}$$

É claro que

$$p(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda - 2 = 0 \\ \lambda - 6 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \lambda = 2 \ \text{ ou } \ \lambda = 6.$$

Logo, os autovalores de T são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 6$.

Determinando os autoespaços V_2 e V_6.

$$(z,w) \in V_2 \Longleftrightarrow (z,w) \in \ker(A-2I_2) = \ker \begin{bmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2z + 2iw = 0 \\ -2iz + 2w = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow z = -iw.$$

Portanto, $V_2 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2;\ w = iz\} = \big[(-i,\ 1)\big]$.

$$(z,w) \in V_6 \Longleftrightarrow (z,w) \in \ker(A+6I_2) = \ker \begin{bmatrix} -2 & 2i \\ -2i & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2i \\ -2i & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -2z + 2iw = 0 \\ -2iz - 2w = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow z = iw.$$

Portanto, $V_6 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2;\ z = iw\} = \big[(i,\ 1)\big]$.

(g) Seja A uma matriz quadrada de ordem n, mostre que:

(g_1) O polinômio característico de A^T, a transposta de A, coincide com o polinômio característico de A, ou seja, $p_{A^T}(\lambda) = p_A(\lambda)$.

(g_2) Se A é matriz diagonal ou matriz triangular, então os autovalores de A são os elementos da diagonal principal.

(g_3) Se A é invertível, então 0 não é autovalor de A.

(g_4) Se A é invertível e λ_1 é um autovalor de A, então $\dfrac{1}{\lambda_1}$ é autovalor de A^{-1}.

Solução:

(g_1) Seja $p_A(\lambda) = (A - \lambda I_n)$ o polinômio característico de A, então o polinômio característico de A^T é dado por $p_{A^T}(\lambda) = \det(A^T - \lambda I_n)$ e

$$p_{A^T}(\lambda) = \det(A^T - \lambda I_n) = \det(A^T - \lambda I_n^T) = \det(A - \lambda I_n)^T = \det(A - \lambda I_n) = p_A(\lambda).$$

(g_2) Se A é diagonal ou triangular, então a matriz $A - \lambda I_n$ também é diagonal ou triangular, com elementos da diagonal:

$$a_{11} - \lambda, \quad a_{22} - \lambda, \quad \cdots, \quad a_{nn} - \lambda.$$

Como o determinante de uma matriz diagonal ou triangular é o produto dos elementos da diagonal principal segue que:

$$p_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) \cdot \cdots \cdot (a_{nn} - \lambda),$$

cujas raízes são:

$$a_{11}, \quad a_{22}, \quad \cdots, \quad a_{nn}.$$

(g_3) 0 é uma raiz do polinômio característico de A, se, e somente se,

$$p(0) = 0 \Longleftrightarrow \det(A - 0I_n) = 0 \Longleftrightarrow \det A = 0 \Longleftrightarrow A \text{ não é invertível.}$$

Portanto, A é invertível se, e somente se, 0 não é autovalor de A.

(g_4) Como λ_1 é um autovalor de A e A é invertível, pelo item anterior sabemos que $\lambda_1 \neq 0$, além disso $\det(A-\lambda_1 I_n)=0$.

Logo,

$$\det(A-\lambda_1 I_n)\cdot \det A^{-1}=0 \iff \det\left((A-\lambda_1 I_n)\cdot A^{-1}\right)=0 \iff \det(A\cdot A^{-1}-\lambda_1 A^{-1})=0$$

$$\iff \det(I_n-\lambda_1 A^{-1})=0 \iff \det\left((-\lambda_1)\left(A^{-1}-\frac{1}{\lambda_1}I_n\right)\right)=0$$

$$\iff (-\lambda_1)^n \det\left(A^{-1}-\frac{1}{\lambda_1}I_n\right)=0 \overset{\lambda_1\neq 0}{\Longrightarrow} \det\left(A^{-1}-\frac{1}{\lambda_1}I_n\right)=0 \iff p_{A^{-1}}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)=0.$$

Consequentemente, $\dfrac{1}{\lambda_1}$ é autovalor de A^{-1}.

Observações 7.2.5 (a) Se V é um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$ e T é um operador linear sobre V, então o polinômio característico de T, $p_T(\lambda)$, é um polinômio de grau n na variável λ com coeficientes reais.

Consequentemente, $p_T(\lambda)$ tem no máximo n raízes reais.

De acordo com o demonstrado no apêndice destas notas, uma consequência do **Teorema 4.3.11** é que se n é um número ímpar, então $p_T(\lambda)$ tem um número ímpar de raízes reais.

Portanto, se $\dim V$ é ímpar, então o operador T pelo menos um autovalor.

(b) Se V é um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{C}$ e T é um operador linear sobre V, então o polinômio característico de T, $p_T(\lambda)$, é um polinômio de grau n na variável λ com coeficientes complexos.

O polinômio $p_T(\lambda)$ tem exatamente n raízes, podendo ocorrer raízes repetidas.

Portanto, neste caso o operador T pelo menos um autovalor.

7.3 Diagonalização de Operadores Lineares

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, de dimensão finita n, e $T: V \longrightarrow V$ um operador linear, a obtenção dos autovalores e autovetores de T é importante, pois em alguns casos podemos encontrar uma base $\mathscr{B}$ de V constituída de autovetores tal que a matriz de T em relação à essa base é diagonal, assim obteríamos a representação mais simples do operador T.

No **Exemplo** $(\mathbf{a}_1)$ acima o operador de $\mathbb{R}^2$ dado por: $T(x,y)=(y,\ 9x)$ tem dois autovalores: $\lambda_1=3$ e $\lambda_2=-3$ com autoespaços:

$$V_3=\big[(1,\ 3)\big] \quad \text{e} \quad V_{-3}=\big[(1,\ -3)\big].$$

Observemos que $\mathscr{B}=\big\{(1,\ 3),\ (1,\ -3)\big\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ e que:

$$\begin{array}{rcl} T(1,\ 3) & = & (3,9)=\ 3\ (1,\ 3)\ +\ 0\ (1\ -3) \\ T(1,\ -3) & = & (-3,9)=0\ (1,\ 3)+(-3)\ (1,\ -3). \end{array}$$

Portanto,

$$[T]_{\mathscr{B}}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{é uma matriz diagonal.}$$

Já no **Exemplo** $(\mathbf{a}_2)$ acima o operador de $\mathbb{R}^3$ dado por $T(x,y,z) = (x,\ y,\ x)$ tem dois autovalores: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$ com autoespaços:

$$V_0 = \big[(0,\ 0,\ 1)\big] \quad \text{e} \quad V_1 = \big[(1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 0)\big].$$

Novamente $\mathscr{B} = \big\{(0,\ 0,\ 1),\ (1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 0)\big\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e temos:

$$\begin{aligned} T(0,\ 0,\ 1) &= (0,\ 0,\ 0) = 0\,(0,\ 0,\ 1) + 0\,(1,\ 0,\ 1) + 0\,(0,\ 1,\ 0) \\ T(1,\ 0,\ 1) &= (1,\ 0,\ 1) = 0\,(0,\ 0,\ 1) + 1\,(1,\ 0,\ 1) + 0\,(0,\ 1,\ 0) \\ T(0,\ 1,\ 0) &= (0,\ 0,\ 1) = 0\,(0,\ 0,\ 1) + 0\,(1,\ 0,\ 1) + 1\,(0,\ 1,\ 0). \end{aligned}$$

Logo,

$$[T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{é uma matriz diagonal.}$$

Os operadores acima são chamados operadores diagonalizáveis, mais precisamente temos a seguinte definição:

Definição 7.3.1 Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, de dimensão finita n. Dizemos que um operador linear $T : V \longrightarrow V$ é **diagonalizável** se existe $\mathscr{B}$ uma base ordenada de V tal que $[T]_{\mathscr{B}}$ é uma matriz diagonal.

Observação 7.3.1 A existência de autovalores não implica que T é um operador diagonalizável, no Exemplo (d_1) acima o operador de $\mathbb{R}^4$ dado por $T(x,y,z,w) = (x+y,\ y,\ 2z+w,\ 2z+w)$ tem três autovalores: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 3$, com autoespaços:

$$V_1 = \big[(1,\ 0,\ 0,\ 0)\big], \quad V_0 = \big[(0,\ 0,\ 1,\ -2)\big] \quad \text{e} \quad V_3 = \big[(0,\ 0,\ 1,\ 1)\big].$$

Embora o conjunto $\mathscr{B} = \big\{(1,\ 0,\ 0,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1,\ -2),\ (0,\ 0,\ 1,\ 1)\big\}$ seja um subconjunto L.I. de $\mathbb{R}^4$ não é uma base, pois contém apenas três vetores.

De modo geral temos o seguinte resultado:

Teorema 7.3.2 Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, de dimensão finita n, e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear que possui autovalores distintos $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_k$. Se $\mathscr{B}_1 = \{v_{11},\ \cdots,\ v_{1n_1}\}$, $\mathscr{B}_2 = \{v_{21},\ \cdots,\ v_{2n_2}\}, \cdots, \mathscr{B}_k = \{v_{k1},\ \cdots,\ v_{kn_k}\}$ são bases, respectivamente, dos autoespaços $V(\lambda_1)$, $V(\lambda_2), \cdots, V(\lambda_k)$, então $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_k$ é um subconjunto linearmente independente de V.

Demonstração: Sejam $\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1n_1}, \alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2n_2}, \cdots, \alpha_{k1}, \cdots \alpha_{kn_k}$ em $\mathbb{K}$ tais que:

$$\alpha_{11}v_{11} + \cdots + \alpha_{1n_1}v_{1n_1} + \alpha_{21}v_{21} + \cdots + \alpha_{2n_2}v_{2n_2} + \cdots + \alpha_{k1}v_{k1} + \cdots + \alpha_{kn_k}v_{kn_k} = 0_V. \tag{7.3.1}$$

Multiplicando 7.3.1 por λ_1 obtemos:

$$\begin{aligned} &\lambda_1\alpha_{11}v_{11} + \cdots + \lambda_1\alpha_{1n_1}v_{1n_1} + \lambda_1\alpha_{21}v_{21} + \cdots + \lambda_1\alpha_{2n_2}v_{2n_2} + \\ &\cdots + \lambda_1\alpha_{k1}v_{k1} + \cdots + \lambda_1\alpha_{kn_k}v_{kn_k} = 0_V. \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

Aplicando o operador T em 7.3.1 obtemos:

$$\begin{aligned} &\lambda_1\alpha_{11}v_{11} + \cdots + \lambda_1\alpha_{1n_1}v_{1n_1} + \lambda_2\alpha_{21}v_{21} + \cdots + \lambda_2\alpha_{2n_2}v_{2n_2} + \\ &\cdots + \lambda_k\alpha_{k1}v_{k1} + \cdots + \lambda_k\alpha_{kn_k}v_{kn_k} = 0_V. \end{aligned} \tag{7.3.3}$$

Subtraindo 7.3.3 de 7.3.4 obtemos:

$$\begin{aligned}&(\lambda_2-\lambda_1)\alpha_{21}v_{21}+\cdots+(\lambda_2-\lambda_1)\alpha_{2n_2}v_{2n_2}+\cdots+\\&(\lambda_k-\lambda_1)\alpha_{k1}v_{k1}+\cdots+(\lambda_k-\lambda_1)\alpha_{kn_k}v_{kn_k}=0_V.\end{aligned}\tag{7.3.4}$$

Repetindo esse processo sucessivamente, de multiplicar a equação resultante pelo próximo autovalor, aplicar T na equação e subtraí-las, $(k-2)$ vezes obtemos:

$$(\lambda_k-\lambda_{k-1})\cdots(\lambda_k-\lambda_2)(\lambda_k-\lambda_1)\alpha_{k1}v_{k1}+\cdots+(\lambda_k-\lambda_{k-1})\cdots(\lambda_k-\lambda_2)(\lambda_k-\lambda_1)\alpha_{kn_k}v_{kn_k}=0_V.$$

Como $\mathscr{B}_k=\{v_{k1},\ \cdots,\ v_{kn_k}\}$ é base, seus vetores são L.I. e os autovalores $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_k$ são distintos, segue que $\alpha_{k1}=\cdots=\alpha_{kn_k}=0$.

Substituindo nas equações anteriores obtemos:

$$\alpha_{11}=\cdots=\alpha_{1n_1}=\alpha_{21}=\cdots=\alpha_{2n_2}=\cdots=\alpha_{k1}=\cdots=\alpha_{kn_k}=0.$$

Portanto, $\mathscr{B}=\mathscr{B}_1\cup\mathscr{B}_2\cup\cdots\cup\mathscr{B}_k$ é um subconjunto linearmente independente de V. ■

Corolário 7.3.3 No **Teorema 7.3.2** acima se $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$, então $\mathscr{B}=\mathscr{B}_1\cup\mathscr{B}_2\cup\cdots\cup\mathscr{B}_k$ é base de V. Além disso:

$$[T]_{\mathscr{B}}=\begin{bmatrix}\lambda_1&\cdots&0&0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots&0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&\lambda_1&0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&\lambda_2&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&\vdots&\ddots&\vdots&\cdots&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&0&\cdots&\lambda_2&\cdots&0&\cdots&0\\ \vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\ddots&\cdots&\vdots&\vdots\\ 0&\cdots&0&0&\cdots&0&\cdots&\lambda_k&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&0&\cdots&0&\cdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0&0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&\lambda_k\end{bmatrix}.$$

Corolário 7.3.4 Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, de dimensão finita n, e $T:V\longrightarrow V$ um operador linear, então temos:

(i) T tem no máximo n autovalores distintos.

(ii) Se T possui n autovalores distintos, então T é um operador diagonalizável.

Demonstração:

(i) Se T tivesse k autovalores distintos $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_k$, com $k>n$, então $v_1,\ \cdots,\ v_k$ os autovetores associados, respectivamente, a $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_k$ formaria um subconjunto L. I. de V, mas $\dim V=n$, contrariando o fato de que qualquer subconjunto de um espaço vetorial de dimensão n tem no máximo n elementos.

Portanto, T tem no máximo n autovalores distintos.

(ii) Se T possui n autovalores distintos: $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n$, então pelo **Teorema 7.3.2** o conjunto

$$\mathscr{B}=\{v_1,\ \cdots,\ v_n\}$$

é um subconjunto L. I. de V, como $\dim V=n$ segue que $\mathscr{B}$ é uma base de V.

Além disso,

$$\begin{array}{rcccl} T(v_1) & = & \lambda_1 v_1 & = & \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \cdots 0v_n \\ T(v_2) & = & \lambda_2 v_2 & = & 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots 0v_n \\ & & \vdots & & \\ T(v_n) & = & \lambda_n v_n & = & 0v_1 + 0v_2 + \cdots \lambda_n v_n. \end{array}$$

Logo,

$$[T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \text{ou seja,} \quad T \quad \text{é diagonalizável.}$$

■

Teorema 7.3.5 Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, de dimensão finita n, e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, então T é diagonalizável se, e somente se, existe uma base ordenada $\mathscr{B}$ para V constituída de autovetores de T.

Demonstração: Seja $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base ordenada de V de autovetores e sejam $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ os respectivos autovalores de T, não necessariamente distintos, então temos:

$$\begin{array}{rcccl} T(v_1) & = & \lambda_1 v_1 & = & \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \cdots 0v_n \\ T(v_2) & = & \lambda_2 v_2 & = & 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots 0v_n \\ & & \vdots & & \\ T(v_n) & = & \lambda_n v_n & = & 0v_1 + 0v_2 + \cdots \lambda_n v_n. \end{array}$$

Logo,

$$[T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \text{é matriz diagonal.}$$

Consequentemente, T é operador diagonalizável.

Reciprocamente, suponhamos que existe $\mathscr{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ base ordenada de V tal que $[T]_{\mathscr{B}}$ é matriz diagonal, mostremos que os vetores de $\mathscr{B}$ são autovetores de T. Como $[T]_{\mathscr{B}}$ é matriz diagonal, então

$$[T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n \end{bmatrix},$$

com $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ escalares em $\mathbb{K}$.

Além disso, escrevendo os vetores de $\mathscr{B}$ em relação à $\mathscr{B}$ obtemos:

$$\begin{array}{rcccl} T(u_1) & = & \mu_1\, u_1 + 0\, u_2 + \cdots 0\, u_n & = & \mu_1 u_1 \\ T(u_2) & = & 0\, u_1 + \mu_2\, u_2 + \cdots 0\, u_n & = & \mu_2 u_2 \\ & & \vdots & & \\ T(u_n) & = & 0\, u_1 + 0\, u_2 + \cdots \mu_n\, u_n & = & \mu_n u_n. \end{array}$$

Portanto, $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ são autovalores de T e $u_1, u_2, \cdots, u_n$ são, respectivamente, autovetores associados a estes autovalores.

Consequentemente, $\mathscr{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ é uma base de V constituída de autovetores. ■

Teorema 7.3.6 Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, de dimensão finita n, e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, então T é diagonalizável se, e somente se, $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, todos os autovalores de T, são tais que

$$\dim V = \dim(V_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(V_{\lambda_k}).$$

Definição 7.3.2 Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, de dimensão finita n, e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Dado λ_k um autovalor de T a **multiplicidade algébrica** de λ_k é a multiplicidade de λ_k como raiz de $p_T(\lambda)$, o polinômio característico de T.

Notação: $m_A(\lambda_i)$.

Observação 7.3.7 Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, de dimensão finita n, e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, então $m \in \mathbb{N}^*$ é a multiplicidade algébrica de λ_i, ou seja, $m = m_A(\lambda_k)$ se, e somente se, $p_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^m \cdot q_T(\lambda)$ tal que $q_T(\lambda_k) \neq 0$, ou seja, λ_k não é raíz de $q_T(\lambda)$.

Proposição 7.3.8 Se λ_i é um autovalor de um operador linear $T : V \longrightarrow V$, então a multiplicidade geométrica de λ_k é menor ou igual à multiplicidade algébrica de λ_k, ou seja, $m_G(\lambda_k) \leq m_A(\lambda_k)$.

Demonstração: Seja λ_k um autovalor de T, então $m_G(\lambda_k) = \dim(V_{\lambda_k}) = r$.

Tomando $\mathscr{B}_{\lambda_k} = \{u_1, \cdots, u_r\}$ uma base de V_{λ_k}, pelo **Teorema 4.3.11** podemos completá-la a $\mathscr{B} = \{u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_n\}$ uma base de V.

Como $T(u_i) = \lambda_i \cdot u_i$ para todo $i \in \{1, \cdots, r\}$, segue que:

$$[T]_{\mathscr{B}} = \left[\begin{array}{cccc|c} \lambda_k & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda_k & \cdots & 0 & \\ \vdots & & & \vdots & B \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & & \vdots & A \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right],$$

com $B \in M_{r\times(n-r)}(\mathbb{K})$ e $A \in M_{(n-r)\times(n-r)}(\mathbb{K})$.

Logo,

$$p_T(\lambda) = \det\left([T]_{\mathscr{B}} - \lambda I_n\right) = \left|\begin{array}{cccc|c} \lambda_k - \lambda & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda_k - \lambda & \cdots & 0 & \\ \vdots & & & \vdots & B \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k - \lambda & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & & \vdots & A - \lambda I_{n-r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right|$$

$$= (\lambda_k - \lambda)^r \cdot \det(A\lambda I_{n-r}).$$

Portanto, $(\lambda - \lambda_k)^r$ divide $p_T(\lambda)$, mas sabemos que $m = m_A(\lambda_k)$, a multiplicidade algébrica de λ_k, é o maior inteiro positivo tal que $(\lambda - \lambda_k)^m$ divide $p_T(\lambda)$, consequentemente $r = m_G(\lambda_k) \leq m = m_A(\lambda_k)$.

■

Observação 7.3.9 Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, de dimensão finita n, e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Se $p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} \cdot \cdots \cdot (\lambda_k - \lambda)^{n_k}$, com $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ todos os autovalores distintos de T, então

$$\dim V = n = n_1 + \cdots + n_k \overset{Prop.7.3.8}{\geq} m_G(\lambda_1) + \cdots + m_G(\lambda_k).$$

Logo, da **Observação 7.3.9** acima e do **Teorema 7.3.6** segue o seguinte resultado:

Teorema 7.3.10 Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, de dimensão finita n, e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, então T é diagonalizável se, e somente se,

(i) O polinômio característico de T possui todas as raízes em $\mathbb{K}$.

(ii) A multiplicidade algébrica de cada autovalor λ_i de T é igual à multiplicidade geométrica de λ_i, ou seja, $m_A(\lambda_i) = m_G(\lambda_i)$.

Exemplos 7.3.11 Verifique em cada um casos abaixo se o operador linear T é diagonalizável, em caso afirmativo determine uma base $\mathscr{B}$ do espaço vetorial correspondente tal que $[T]_{\mathscr{B}}$ é uma matriz diagonal.

(a) T operador sobre $\mathbb{R}^2$.

(a_1) $T(x,y) = (y,\ 9x)$.

(a_2) $T(x,y) = (-y,\ x)$.

Solução:

(a_1) Vimos que os autovalores de T são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -3$, como T é um operador linear de $\mathbb{R}^2$ e $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, segue que T é diagonalizável.

Como $V_3 = \big[(1,\ 3)\big]$ e $V_{-3} = \big[(1,\ -3)\big]$, podemos tomar a seguinte base de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathscr{B} = \{(1,\ 3),\ (1,\ -3)\}, \quad \text{assim} \quad [T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

(a_2) Vimos que T não tem autovalores, portanto o operador T não é diagonalizável.

(b) T operador sobre $\mathbb{R}^3$.

(b_1) $T(x,y,z) = (x,\ y,\ x)$.

(b_2) $T(x,y,z) = (x+z,\ y+z,\ x+y+2z)$.

(b_3) $T(1,1,1) = (4,9,-4)$, $T(0,1,1) = (2,7,-3)$, $T(0,0,1) = (1,4,-2)$.

Solução:

(b_1) Os autovalores de T são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$, neste caso o número de autovalores distintos é menor que a dimensão do espaço, assim vamos utilizar as multiplicidades dos autovalores para verificar se T é diagonalizável.

Vimos que $p(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)^2$, com todas as raízes em $\mathbb{R}$, daí segue que $m_A(0) = 1$) e $m_A(1) = 2$.
Como os autoespaços correspondentes são: $V_0 = \big[(0,\ 0,\ 1)\big]$ e $V_1 = \big[(1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 0)\big]$, consequentemente $m_G(0) = 1$ e $m_G(1) = 2$.

Portanto, T é um operador diagonalizável, podemos tomar a seguinte base de $\mathbb{R}^3$

$$\mathscr{B} = \{(0,\ 0,\ 1),\ (1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 0)\}, \quad \text{assim} \quad [T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b_2) Os autovalores de T são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 3$, como T é um operador linear de $\mathbb{R}^3$ e $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, segue que T é diagonalizável.

Como $V_1 = \big[(1,\ -1,\ 0)\big]$, $V_0 = \big[(-1,\ -1,\ 1)\big]$ e $V_3 = \big[(1,\ 1,\ 2)\big]$, podemos tomar seguinte base de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathscr{B} = \{(1,\ -1,\ 0),\ (-1,\ -1,\ 1),\ (1,\ 1,\ 2)\}, \quad \text{assim} \quad [T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b_3) Os autovalores de T são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 3$, como T é um operador linear de $\mathbb{R}^3$ e $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, segue que T é diagonalizável.

Como $V_1 = \big[(1,\ -1,\ 0)\big]$, $V_{-1} = \big[(0,\ 1,\ -1)\big]$ e $V_3 = \big[(-2,\ -3,\ 1)\big]$, podemos tomar seguinte base de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathscr{B} = \{(1,\ -1,\ 0),\ (0,\ 1,\ -1),\ (-2,\ -3,\ 1)\}, \quad \text{assim} \quad [T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(c) T operador sobre $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

(c_1) $T\big(p(t)\big) = p(0) + p(1)(t + t^2)$.

(c_2) $T\big(p(t)\big) = (1+t)p'(t) + p''(t)$.

(c_3) $T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = (2a_1 + a_2) + (3a_0 - a_1 - a_2)t + 2a_2 t^2$.

Solução:

(c_1) Os autovalores de T são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 2$, como T é um operador linear de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ e $\dim \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) = 3$, segue que T é diagonalizável.

Como $V_1 = [1 - t - t^2]$, $V_0 = [t - t^2]$ e $V_2 = [t + t^2]$, tomamos a seguinte base de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$:

$$\mathscr{B} = \{1 - t - t^2,\ t - t^2,\ t + t^2\}, \quad \text{assim} \quad [T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c_2) Os autovalores de T são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$, como T é um operador linear de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ e $\dim \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) = 3$, segue que T é diagonalizável.

Como $V_0 = [1]$, $V_1 = [1 + t]$ e $V_2 = [2 + 2t + t^2]$, tomamos seguinte base de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$:

$$\mathscr{B} = \{1,\ 1 + t,\ 2 + 2t + t^2\}, \quad \text{assim} \quad [T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c_3) Os autovalores de T são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$, neste caso o número de autovalores distintos é menor que a dimensão do espaço, assim precisamos de outro mecanismo para verificar se T é diagonalizável.

Vimos que $p(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 3)$, com todas as raízes em $\mathbb{R}$, assim segue que $m_A(2) = 2$ e $m_A(-3) = 1$.

Os autoespaços correspondentes são: $V_2 = [1 + t]$ e $V_{-3} = [2 + 3t]$, consequentemente $m_G(2) = 1$) e $m_G(-3) = 1$, como $m_A(2) \neq m_G(2)$, segue que T é um operador que não é diagonalizável.

(d) T operador sobre $\mathbb{R}^4$.

(d_1) $T(x,y,z,w) = (x+y,\ y,\ 2z+w,\ 2z+w)$.

(d_2) A matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$ é: $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução:

(d_1) Os autovalores de T são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 3$, assim T tem 3 autovalores distintos, como $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, vamos usar as multiplicidades dos autovalores para verificar se T é diagonalizável.

Vimos que $p(\lambda) = (1-\lambda)^2\lambda(\lambda-3)$, com todas as raízes em $\mathbb{R}$, daí segue que $m_A(1) = 2$, $m_A(0) = 1$ e $m_A(3) = 1$.

Os autoespaços correspondentes são:

$$V_1 = \big[(1,\ 0,\ 0,\ 0)\big],\ V_0 = \big[(0,\ 0,\ 1,\ -2)\big] \quad \text{e} \quad V_3 = \big[(0,\ 0,\ 1,\ 1)\big],$$

consequentemente $m_G(1) = 1$, $m_G(0) = 1$ e $m_G(3) = 1$, como $m_A(1) \neq m_G(1)$, segue que T é um operador que não é diagonalizável.

(d_2) Os autovalores de T são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -3$, assim T tem 2 autovalores distintos, como $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, vamos usar as multiplicidades dos autovalores para verificar se T é diagonalizável.

Vimos que $p(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda+3)^2$, com todas as raízes em $\mathbb{R}$, daí segue que $m_A(3) = m_A(-2) = 2$.

Os autoespaços correspondentes são:

$$V_3 = \big[(-1,\ 1,\ 0,\ 0),\ (-1,\ 0,\ 1,\ 1)\big] \ \text{e}$$

$$V_{-3} = \big[(1,\ 1,\ -1,\ 0),\ (0,\ 0,\ -1,\ 1)\big],$$

consequentemente $m_G(3) = m_G(-3) = 2$.

Portanto, T é um operador diagonalizável, podemos tomar a seguinte base de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathscr{B} = \{(-1,\ 1,\ 0,\ 0),\ (-1,\ 0,\ 1,\ 1),\ (1,\ 1,\ -1,\ 0),\ (0,\ 0,\ -1,\ 1)\},$$

assim $[T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

(e) T operador sobre $M_2(\mathbb{R})$.

(e_1) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a+b & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$.

(e_2) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & b \\ 0 & c-a-b \end{bmatrix}$.

Solução:

(e_1) O único autovalor de T são $\lambda_1 = 2$, como $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$, vamos usar as multiplicidades do autovalor para verificar se T é diagonalizável.

Vimos que $p(\lambda) = (2-\lambda)^4$, com todas as raízes em $\mathbb{R}$, daí segue que $m_A(2) = 4$.

O autoespaço correspondente é:

$$V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R};\ b = 0 \right\} = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right],$$

consequentemente $m_G(2) = 3$, como $m_A(2) \neq m_G(2)$, segue que T é um operador que não é diagonalizável.

(e_2) Os autovalores de T são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$, assim T tem 2 autovalores distintos, como $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$, vamos usar as multiplicidades dos autovalores para verificar se T é diagonalizável.

Vimos que $p(\lambda) = \lambda^2\lambda(1-\lambda)^2$, com todas as raízes em $\mathbb{R}$, daí segue que $m_A(0) = m_A(1) = 2$.

Os autoespaços correspondentes são:

$$V_0 = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \quad \text{e} \quad V_1 = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right],$$

consequentemente $m_G(0) = m_G(1) = 1$, como $m_A(0) \neq m_G(0)$, segue que T é um operador que não é diagonalizável.

(f) T operador sobre $\mathbb{C}^2$.

(f_1) $T(z,w) = (-w,\ z)$.

(f_2) $T(z,w) = (4z + 2iw,\ -2iz + 4w)$.

Solução:

(f_1) Os autovalores de T são $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$, como T é um operador linear de $\mathbb{C}^2$ e $\dim \mathbb{C}^2_{\mathbb{C}} = 2$, segue que T é diagonalizável.

Como $V_i = \left[(1,\ -i)\right]$ e $V_{-i} = \left[(1,\ i)\right]$, podemos tomar a seguinte base de $\mathbb{C}^2$:

$$\mathscr{B} = \{(1,\ -i),\ (1,\ i)\}, \quad \text{assim} \quad [T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

(f_2) Os autovalores de T são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 6$, como T é um operador linear de $\mathbb{C}^2$ e $\dim \mathbb{C}^2_{\mathbb{C}} = 2$, segue que T é diagonalizável.

Como $V_2 = \left[(-i,\ 1)\right]$ e $V_{-i} = \left[(i,\ 1)\right]$, podemos tomar a seguinte base de $\mathbb{C}^2$:

$$\mathscr{B} = \{(-i,\ 1),\ (i,\ 1)\}, \quad \text{assim} \quad [T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

7.4 Operadores Auto-Adjuntos

Nesta seção vamos considerar V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, de dimensão finita e com produto interno.

Definição 7.4.1 Um operador linear $T : V \longrightarrow V$ é chamado **auto-adjunto** se, e somente se, para quaisquer $u,\ v \in V$ tivermos

$$\langle v, T(u)\rangle = \langle T(v), u\rangle.$$

Exemplo 7.4.1 O operador linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x,y,z) = (x-2y+3z,\ -2x-y+4z,\ 3x+4y+z)$$

é auto-adjunto.

De fato, dados (x_1,y_1,z_1) e (x_2,y_2,z_2) em $\mathbb{R}^3$ temos:

$$\begin{aligned}
\langle (x_1,y_1,z_1), T(x_2,y_2,z_2)\rangle &= \Big\langle (x_1,y_1,z_1),\ (x_2-2y_2+3z_2,\ -2x_2-y_2+4z_2,\ 3x_2+4y_2+z_2)\Big\rangle \\
&= x_1(x_2-2y_2+3z_2)+y_1(-2x_2-y_2+4z_2)+z_1(3x_2+4y_2+z_2) \\
&= x_1x_2-2x_1y_2+3x_1z_2-2y_1x_2-y_1y_2+4y_1z_2+3x_2z_1+4y_2z_1+z_1z_2 \\
&= (x_1-2y_1+3z_1)x_2+(-2x_1-y_1+4z_1)y_2+(3x_1+4y_1+z_1)z_2 \\
&= \Big\langle \big((x_1-2y_1+3z_1),(-2x_1-y_1+4z_1),(3x_1+4y_1+z_1)\big),(x_2,y_2,z_2)\Big\rangle \\
&= \langle T(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle.
\end{aligned}$$

Observemos que a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

que é uma matriz simétrica.

Proposição 7.4.2 Se $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ são bases ortonormais de V, então $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}$ é matriz ortogonal.

Demonstração: Sejam $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ e $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ bases ortonormais de V e

$$M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}. \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_{11}\cdot u_1 + a_{21}\cdot u_2 + \cdots + a_{n1}\cdot u_n \\
v_2 &= a_{12}\cdot u_1 + a_{22}\cdot u_2 + \cdots + a_{n2}\cdot u_n \\
&\vdots \\
v_n &= a_{1n}\cdot u_1 + a_{2n}\cdot u_2 + \cdots + a_{nn}\cdot u_n.
\end{aligned}$$

Como $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ são bases ortonormais, então, para todo i e todo j em $\{1,2,\cdots,n\}$, temos:

$$\begin{array}{rcccl} 1 & = & \langle v_i, v_i\rangle & = & a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \cdots + a_{ni}^2 \\ 0 & \overset{i\neq j}{=} & \langle v_i, v_j\rangle & = & a_{1i}\cdot a_{1j} + a_{2i}\cdot a_{2j} + \cdots + a_{ni}\cdot a_{nj}. \end{array}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \left(M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^T \cdot M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}. \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 + \cdots + a_{n1}^2 & \cdots & a_{11}a_{1n} + a_{21}a_{2n} + \cdots + a_{n1}a_{nn} \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + \cdots + a_{n2}a_{n1} & \cdots & a_{12}a_{1n} + a_{22}a_{2n} + \cdots + a_{n2}a_{n2} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n}a_{11j} + a_{2n}a_{21} + \cdots + a_{nn}a_{n1} & \cdots & a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + \cdots + a_{nn}^2 \end{bmatrix} = I_n. \end{aligned}$$

Portanto, $M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ é matriz ortogonal. ■

Proposição 7.4.3 Se $T : V \longrightarrow V$ operador linear tal que $[T]_{\mathscr{B}'}$ é simétrica, com $\mathscr{B}'$ base ortonormal de V, então $[T]_{\mathscr{B}}$ é simétrica para $\mathscr{B}$ base ortonormal de V.

Demonstração: Sabemos que

$$[T]_{\mathscr{B}} = \left(M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} \cdot [T]_{\mathscr{B}'} \cdot M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}.$$

Como $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ são bases ortonormais, pela proposição anterior segue que

$$\left(M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} = \left(M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^T.$$

Assim,

$$[T]_{\mathscr{B}} = \left(M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^T \cdot [T]_{\mathscr{B}'} \cdot M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}.$$

Portanto,

$$\left([T]_{\mathscr{B}}\right)^T = \left(\left(M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^T \cdot [T]_{\mathscr{B}'} \cdot M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^T = \left(M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^T \cdot \left([T]_{\mathscr{B}'}\right)^T \cdot \left(\left(M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^T\right)^T.$$

Como $[T]_{\mathscr{B}'}$ é simétrica, segue que $\left([T]_{\mathscr{B}'}\right)^T = [T]_{\mathscr{B}'}$.

Consequentemente,

$$\left([T]_{\mathscr{B}}\right)^T = \left(M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^T \cdot [T]_{\mathscr{B}'} \cdot \left(\left(M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\right)^T\right)^T = [T]_{\mathscr{B}}.$$

Logo, $[T]_{\mathscr{B}}$ também é simétrica. ■

Teorema 7.4.4 Um operador linear $T : V \longrightarrow V$ é auto-adjunto se, e somente se, $[T]_{\mathscr{B}}$ é matriz simétrica, para $\mathscr{B}$ base ortonormal de V.

Demonstração: Sejam $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ base ortonormal de V e

$$[T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}. \end{bmatrix}$$

Então, para todo i e todo j temos

$$a_{ij} = \langle v_i, T(v_j) \rangle.$$

Mas, $[T]_{\mathscr{B}}$ é matriz simétrica se, e somente se, $a_{ij} = a_{ji}$.

Portanto, $[T]_{\mathscr{B}}$ é simétrica se, e somente se,

$$\langle v_i, T(v_j) \rangle = \langle T(v_i), v_j \rangle$$

para todo i e todo j.

Já que $\mathscr{B}$ é base ortonormal de V dados u e v em podemos escrever:

$$\begin{aligned} u &= \langle u, u_1 \rangle\, u_1 + \langle u, u_2 \rangle\, u_2 + \cdots + \langle u, u_n \rangle\, u_n \\ v &= \langle v, u_1 \rangle\, u_1 + \langle v, u_2 \rangle\, u_2 + \cdots + \langle vu, u_n \rangle\, u_n. \end{aligned}$$

Como T é linear segue ainda que:

$$\begin{aligned} T(u) &= \langle u, u_1 \rangle\, T(u_1) + \langle u, u_2 \rangle\, T(u_2) + \cdots + \langle u, u_n \rangle\, T(u_n) \\ T(v) &= \langle v, u_1 \rangle\, T(u_1) + \langle v, u_2 \rangle\, T(u_2) + \cdots + \langle vu, u_n \rangle\, T(u_n). \end{aligned}$$

Portanto,

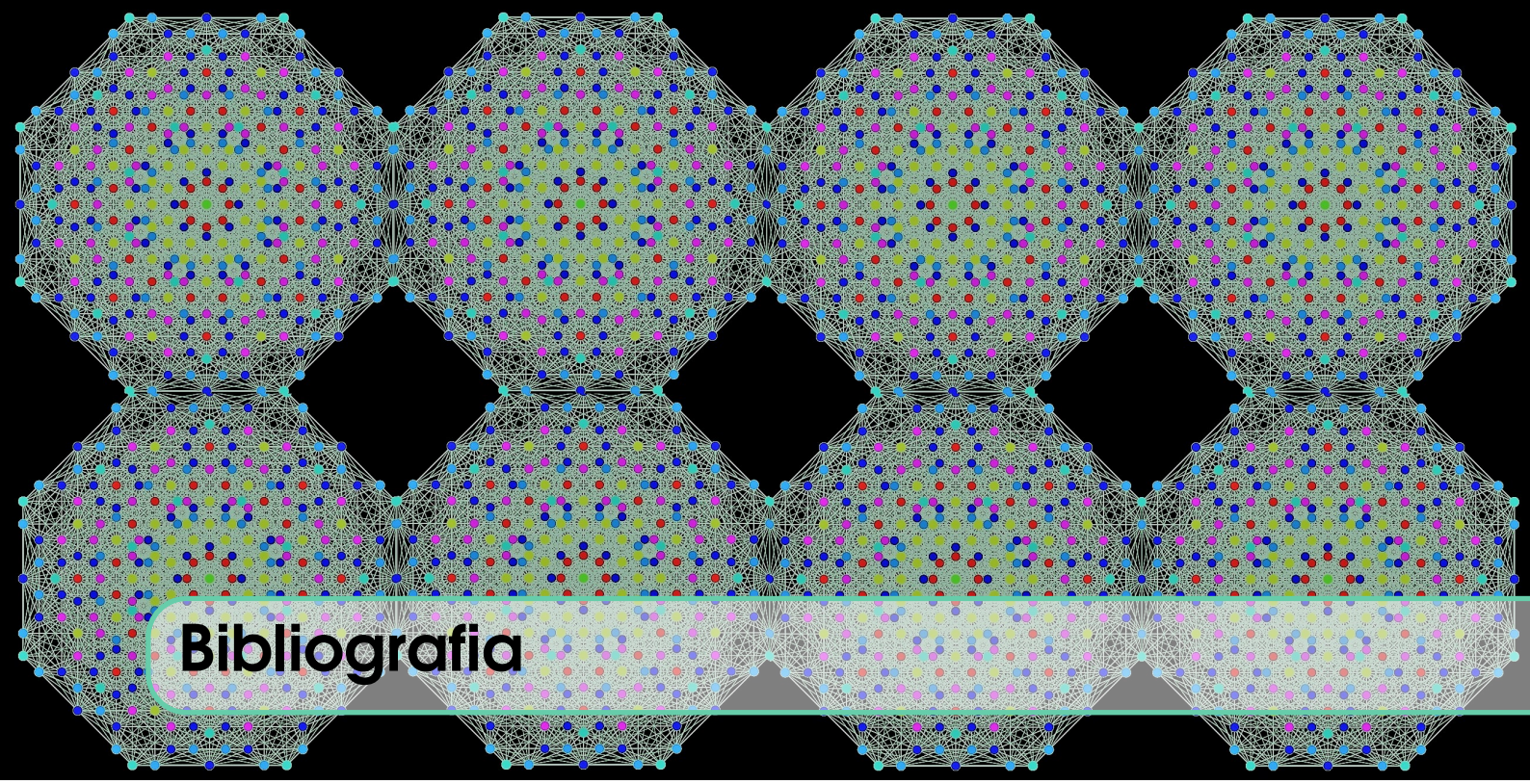
$$\langle v, T(u) \rangle = \langle T(v), u \rangle$$

para quaisquer $u,\ v \in V$ se, e somente se,

$$\langle v_i, T(v_j) \rangle = \langle T(v_i), v_j \rangle$$

para todo i e todo j.

Consequentemente, T é operador auto-adjunto se, e somente se, $[T]_{\mathscr{B}}$ é matriz simétrica. ■



Bibliografia

[1] H. ANTON e C. RORRES. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10ª edição, Bookman, São Paulo, 2012.

[2] R. B. BAPAT. **Linear Algebra and Linear Models**. Third Edition. Springer, London, 2012.

[3] J. L. BOLDRINI, S. I.. R. COSTA, V. L. FIGUEIREDO e H. G. WETZLER. **Álgebra Linear**, 3ª edição, Editora Harbra, São Paulo, 1986.

[4] M. CABRAL e P. GOLDFELD. **Curso de Álgebra Linear: Fundamentos e Aplicações.** Instituto de Matemática, UFRJ, 3ª edição, 2012, disponível em `https://www.labma.ufrj.br/~mcabral/livros/livro-alglin/alglin-material/CursoAlgLin-livro.pdf`

[5] C. A. CALLIOLI, H. I. DOMINGUES e R. C. F. COSTA. **Álgebra Linear e Aplicações.** 6ª edição, Atual Editora, São Paulo, 1990.

[6] F. U. COELHO e M. L. LOURENÇO. **Um Curso de Álgebra Linear.** 2ª Edição, Edusp, São Paulo, 2005.

[7] D. M. FARIAS, P. H. A. KONZEN e R. R. SOUZA. **Álgebra Linear, um Livro Colaborativo**, UFRGS, 2018, disponível em `https://www.ufrgs.br/reamat/AlgebraLinear/livro/livro.pdf`

[8] K. HOFFMAN e R. KUNZE. **Linear Algebra**, Second Edition. Prentice Hall Inc., New Jersey, 1971.

[9] S. LANG. **Álgebra Linear.** Editora Ciência Moderna, São Paulo, 2003.

[10] D. C. LAY, **Álgebra Linear e suas Aplicações.** 2ª edição, Editora LTC, 1999.

[11] E. L. LIMA. **Álgebra Linear**. 9ª Edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2018.

[12] S. LIPSCHUTZ. **Álgebra Linear**. Coleção Schaum, Makron Books), São Paulo, 1994.

[13] J. PELLEGRINI. **Álgebra Linear**. UFABC, 2018, disponível em `http://aleph0.info/cursos/al/notas/al.pdf`

[14] D. POLLE, **Álgebra Linear.** Editora Pioneira Thompson Learning, São Paulo, 2004.

[15] P. PULINO, **Álgebra Linear.** Notas de Aulas, UNICAMP, 2004, disponível em `http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/`

[16] R. J. SANTOS. **Álgebra Linear e Aplicações.** Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2010, disponível em `https://www.ime.unicamp.br/~deleo/MA327/ld2.pdf`

[17] G. SCHAY, **A Concise Introduction to Linear Algebra.** Springer, New York, 2012.

[18] A. A. SILVA. **Introdução à Álgebra Linear**. UFPB, João Pessoa, 2007, disponível em `http://www.mat.ufpb.br/jorge/arquivos/disciplinas/listas/LivroIAL`

[19] J. L. STEVEN, **Álgebra Linear com Aplicações.** 4ª Edição, Editora LTC, Rio de Janeiro, 1999.

[20] S. ZANI. **Álgebra Linear**. ICMC USP, 2010, disponível em `http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/szani/alglin.pdf`